nナッチ数列の隣接 2 項間の比の極限

The limit of the ratio between the two adjacent terms of n-bonacci sequence

岡山県立岡山一宮高等学校　清友　宏紀　瀧　翔太

概要

フィボナッチ数列の隣接 2 項間，第k項と第$k+1$項の比は，$k\to\infty$のとき，$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$に収束することが知られている。このフィボナッチ数列を一般化した，初項 1，前n項の和で表されるnナッチ数列の隣接 2 項間の比は，$n=2,3,4$のときについて既に知られている。そこで私たちは$n\geq 5$のときについて調べ，方程式$x^n-x^{n-1}-\cdots-x-1=0$の解のうち，最も絶対値が大きい解に収束することがわかった。また，その収束値をnを変数とした数列と考え，その$n\to\infty$の極限も調べた。

はじめに

フィボナッチ数列には多くの未解決問題がある。その中で，フィボナッチ数列や前 3,4 項の和で表される数列では解決されているが，前 5 項以上の和で表される数列については解決していない，隣接 2 項間の比の極限について，前n項の和に一般化したnナッチ数列で解決しようと考えた。

定義

フィボナッチ数列を一般化したnナッチ数列を次のように定義する。初期値を 1，それ以前の項の値を 0 とした。

(定義 1)自然数n,kに対して，

$$F_k^{(n)}=\begin{cases}0 & (k\leq 0)\\ 1 & (k=1)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}F_{k-i}^{(n)} & (k\geq 2)\end{cases}$$

証明

本論文では以下の 2 つの定理を証明する。また，その過程で必要になる補題や命題，その証明の一部を示す。

(定理 1) $\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}=e_1$

(定理 2) $\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}\right)=2$

(補題 1-1)

任意の自然数nと任意の正の実数$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1},a_n$について，$x$についての$n$次方程式$a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0=0$は，正の実数解をただ 1 つもつ。

(証明)

数学的帰納法で証明する。

[1] $n=1$のとき，

xについての 1 次方程式$a_1x-a_0=0$はただ 1 つの正の実数解$x=\frac{a_0}{a_1}$をもつ。

[2] $n=m-1$で成り立つと仮定すると，
関数$f(x)=a_mx^m-a_{m-1}x^{m-1}-a_{m-2}x^{m-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0$とおく。

$$f'(x)=ma_mx^{m-1}-(m-1)a_{m-1}x^{m-2}-(m-2)a_{m-2}x^{m-3}-\cdots-2a_2x-a_1=0$$

とすると，この方程式は帰納法の仮定より，ただ 1 つの正の実数解をもつ。この解をx_0とおく。
$f'(0)=-a_1<0$，また，十分大きな正の実数をx_1とすると，$f'(x_1)>0$であるから，
関数$f(x)$は$x=x_0$で極小値をとる。また，
極小となる$x(>0)$の値は 1 つしかなく，
$f(0)=-a_0<0$であるから，
方程式$a_mx^m-a_{m-1}x^{m-1}-a_{m-2}x^{m-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0=0$は正の実数解をただ 1 つもつ。すなわち，$n=m$で成り立つ。
[1]と[2]より，
xについてのn次方程式$a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0=0$は，正の実数解をただ 1 つもつ。終

(補題 1-2)

xについてのn次方程式$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1=0$は，正の実数解をただ 1 つもつ。その解を$x=t$とおくと，$1\leq t<2$である。

(証明)

xについてのn次方程式$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1=0$が，正の実数解をただ 1 つもつことは，(補題 1-1)より直ちに導かれる。
また，関数$f(x)=x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1$とおくと，
[1] $n=1$のとき，
方程式$f(x)=x-1=0$について，解はただ 1 つであり，その解は，$x=1$で正の実数である。

[2] $n\geq 2$のとき，

$f(1)<0, f(2)=2^n-\sum_{i=0}^{n-1}2^i=1>0$であり，$f(x)$は連続関数であるから，
中間値の定理より，
方程式$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1=0$は，$1<x<2$の範囲に実数解をもつ。
この方程式は正の実数解をただ 1 つもつから，$1<t<2$である。
[1]と[2]より，
xについてのn次方程式$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1=0$は，正の実数解をただ 1 つもつ。その解を$x=t$とおくと，$1\leq t<2$である。終

(補題 1-3)

方程式$a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0=0$の唯一の正の実数解を$\alpha$，任意の他の解を$\beta$とおくと，$\alpha\geq|\beta|$が成り立つ。

(証明)

$\alpha<|\beta|$を満たす解βが存在しないことを示す。
関数$f(x)=a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-a_{n-2}x^{n-2}-\cdots-a_2x^2-a_1x-a_0$とおく。
$\alpha<|\beta|$を満たす複素数βに対して，

$$|f(\beta)|=|a_n\beta^n-a_{n-1}\beta^{n-1}-a_{n-2}\beta^{n-2}-\cdots-a_2\beta^2-a_1\beta-a_0|$$

$\geq |a_n\beta^n| - |a_{n-1}\beta^{n-1}| - |a_{n-2}\beta^{n-2}| - \cdots$
$- |a_2\beta^2| - |a_1\beta| - |a_0|$
$= a_n|\beta|^n - a_{n-1}|\beta|^{n-1} - a_{n-2}|\beta|^{n-2} - \cdots$
$- a_2|\beta|^2 - a_1|\beta| - a_0$
$= f(|\beta|)$
すなわち，$|f(\beta)| \geq f(|\beta|)$
また，(補題 1-1)より$\alpha < |\beta|$を満たす$|\beta|$について，$f(|\beta|) > 0$であるから，$|f(\beta)| > 0$，ゆえに，$f(\beta) \neq 0$である。
したがって，
方程式$a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - a_{n-2}x^{n-2} - \cdots - a_2x^2 - a_1x - a_0 = 0$について，$\alpha < |\beta|$を満たす解$\beta$は存在しない。㊫

(補題 1-4)
$0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_n$を満たす実数に対して，方程式$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 = 0$の任意の解$\alpha$は，$|\alpha| \leq 1$を満たす。
(証明)
関数$f(x) = (x-1)(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 + a_0)$とおく。
$f(x) = a_nx^{n+1} - (a_n - a_{n-1})x^n - (a_{n-1}$
$-a_{n-2})x^{n-1} - \cdots - (a_1 - a_0)x - a_0$
と，変形され，この係数$a_n, \left(a_n - a_{n-1}\right),$
$\left(a_{n-1} - a_{n-2}\right), \cdots, \left(a_2 - a_1\right), a_0$はすべて正であるから(補題 1-1)より，方程式$f(x) = 0$はただ 1 つ正の実数解をもつ。また，その解は$x = 1$である。
したがって，(補題 1-3)より，$|\alpha| \leq 1$が成り立つ。㊫

(補題 1-5)
自然数nに対して，$1 \leq x < 2$の範囲で，
$1 > x - 1 > x^2 - x - 1 > x^3 - x^2 - x - 1 > \cdots > x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x - 1$が成り立つ。

(命題 1)
$n \geq 2$のとき，方程式$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$の唯一の正の実数解$x = t$について，その他の解の絶対値は$|t|$より小さい。
(証明)
整式$P(x) = x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1$とおく。方程式$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$の解について，(補題 1-2)及び$x = 1$は解ではないことより，この方程式は，$1 < x < 2$の範囲に唯一の正の実数解をもつ。
よって，因数定理より，
$P(x) = (x - t)Q(x)$
と因数分解できる。
$Q(x) = x^{n-1} + (t-1)x^{n-2}$
$+(t(t-1)-1)x^{n-3} + \cdots$
$+(t(t(t(\cdots)-1)-1)-1)$
$= x^{n-1} + (t-1)x^{n-2}$
$+(t^2 - t - 1)x^{n-3} + \cdots + (t^{n-1}$
$-t^{n-2} - t^{n-3} - \cdots - t^2 - t - 1)$
$1 < t < 2$であるから，(補題 1-5)及び$P(t) = 0$より，
$1 > t - 1 > t^2 - t - 1 >$
$\cdots > t^{n-1} - t^{n-2} - \cdots - t - 1$
$> t^n - t^{n-1} - \cdots - t - 1 = 0$
である。ゆえに，方程式$Q(x) = 0$の係数が(補題 1-4)の条件を満たすから，(補題 1-4)より，方程式$Q(x) = 0$の任意の解zについて，$|z| \leq 1$である。したがって，方程式$P(x) = 0$の唯一の正の実数解tについて，他の解の絶対値は$|t|$より小さい。㊫

(補題 2-1)

方程式$x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$は正の実数の重解をもたない。

(補題 2-2)

方程式$x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$は重解をもたない。

(証明)

背理法で証明する。

重解をもつと仮定して，その解をeとおく。

整式$P(x) = x^n - x^{n-1} - \cdots - x^2 - x - 1$とおく。

$P(x) = (x-e)Q(x)$とすると，

$P(x) = 0$が重解eをもつ$\Leftrightarrow P(x)$が$(x-e)^2$で割り切れる$\Leftrightarrow Q(e) = 0$

である。また，

$$P'(x) = (x-e) \cdot \frac{dQ}{dx}(x) + Q(x)$$

より，

$$Q(e) = P'(e) = ne^{n-1} - (n-1)e^{n-2} - (n-2)e^{n-3} - \cdots - 3e^2 - 2e - 1$$

である。

$P(e) = e^n - e^{n-1} - e^{n-2} - \cdots - e^2 - e - 1 = 0$より，

$$P(e) - Q(e) = e^n - (n+1)e^{n-1} + (n-2)e^{n-2} + (n-3)e^{n-3} + \cdots + 2e^2 + e = 0$$

$e \neq 0$より，

$$e^{n-1} - (n+1)e^{n-2} + (n-2)e^{n-3} + (n-3)e^{n-4} + \cdots + 2e^1 + 1 = 0$$

ここで，

$$S = e^{n-1} - (n+1)e^{n-2} + (n-2)e^{n-3} + (n-3)e^{n-4} + \cdots + 2e^1 + 1$$

とおく。

$$Q(e) + S = (n+1)e^{n-1} - 2ne^{n-2} = 0$$

すなわち，

$$e = \frac{2n}{n+1}$$

ここで，nは自然数より，eは正の実数である。

しかし，(補題 2-1)より，方程式$P(x) = 0$は正の実数の重解をもたない。

したがって，仮定は誤りで，

方程式$P(x) = 0$は重解をもたない。㊫

(補題 2-3)

$1 - x - x^2 - \cdots - x^n = (1 - e_1 x)(1 - e_2 x) \cdots (1 - e_n x)$が成り立つ。ただし，$e_a$は$x$についての$n$次方程式$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$の解である。

(命題 2)

数列$\{F_k^{(n)}\}$の一般項は，

$F_k^{(n)} = A_1 {e_1}^k + A_2 {e_2}^k + A_3 {e_3}^k + \cdots + A_n {e_n}^k$

と，表される。

ただし，A_aは，初期値によって決まる定数で，e_aはxについてのn次方程式

$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$

の解である。

(証明)

簡略化のために，$F_k^{(n)}$を，F_kと表記する。

関数$F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i-1} \quad (0 < x < \frac{1}{4})$とおく。

$$F(x) < \sum_{i=1}^{\infty} |F_i| \left(\frac{1}{4}\right)^{i-1}$$

ここで，

$F_{k+1} - F_k$

$= \left(F_k + F_{k-1} + \cdots + F_{k-n+1}\right)$

$\quad - \left(F_{k-1} + F_{k-2} + \cdots + F_{k-n}\right)$

$= F_k - F_{k-n}$

であるから，$F_{k+1} \leq 2F_k$より，$F_k \leq 2^{k-1}F_1$である。ゆえに，

$$F(x) < \sum_{i=1}^{\infty}|F_i|\left(\frac{1}{4}\right)^{i-1} \leq \sum_{i=1}^{\infty}\left|F_1\right|\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}$$

である。よって，これは絶対収束する。

$$xF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^i$$

$$x^2F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i+1}$$

$\vdots$

$$x^nF(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i+n-1}$$

上記式は全て絶対収束するから，各式の両辺の和をとると，

$$(x + x^2 + \cdots + x^n)F(x) = \sum_{i=1}^{\infty}(F_{i-n+1} + F_{i-n+2} + \cdots + F_n)\, x^i$$

$$(x + x^2 + \cdots + x^n)F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{i+1}\, x^i$$

ゆえに，

$F(x) = (x + x^2 + \cdots + x^n)F(x) + F_1$

$0 < x < \frac{1}{4}$より，$1 - x - x^2 - \cdots - x^n \neq 0$であるから，

$$F(x) = \frac{F_1}{1 - x - x^2 - \cdots - x^n}$$

また，(補題 1-2)及び(命題 1)より，$|e_a| < 2$であり，

$1 - e_a x \neq 0$

であるから，(補題 2-3)より，

$$F(x) = \frac{F_1}{(1 - e_1 x)(1 - e_2 x)\cdots(1 - e_n x)}$$

(補題 2-2)より，方程式$x^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x^2 - x - 1 = 0$は重解を持たないから，次のように部分分数分解できる。

$$F(x) = \frac{A_1}{1 - e_1 x} + \frac{A_2}{1 - e_2 x} + \cdots + \frac{A_n}{1 - e_n x}$$

$|e_a x| < 1$であるから，$\frac{1}{1-e_a x} = \sum_{i=0}^{\infty}(e_a x)^i$より，

$$F(x) = A_1\sum_{i=0}^{\infty}(e_1 x)^i + A_2\sum_{i=0}^{\infty}(e_2 x)^i + \cdots + A_n\sum_{i=0}^{\infty}(e_n x)^i$$

$\sum_{i=0}^{\infty}(e_a x)^i$は全て絶対収束するから，

$$F(x) = \sum_{i=0}^{\infty}(A_1 {e_1}^i + A_2 {e_2}^i + \cdots + A_n {e_n}^i)\, x^i$$

よって，$0 < x < \frac{1}{4}$において，

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(A_1 {e_1}^i + A_2 {e_2}^i + \cdots + A_n {e_n}^i)\, x^i$$

一致の定理より，関数$F(x)$が定義されるxの範囲で，

$$\sum_{i=1}^{\infty} F_i x^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(A_1 {e_1}^i + A_2 {e_2}^i + \cdots + A_n {e_n}^i)\, x^i$$

係数比較より，

$F_{k+1} = A_1 {e_1}^k + A_2 {e_2}^k + A_3 {e_3}^k \cdots + A_n {e_n}^k$

が導かれる。

A_a/e_aを新しくA_aと置き換えると，

$$F_{k+1} = A_1 {e_1}^{k+1} + A_2 {e_2}^{k+1} + A_3 {e_3}^{k+1} \cdots + A_n {e_n}^{k+1}$$

すなわち，

$F_k = A_1 {e_1}^k + A_2 {e_2}^k + A_3 {e_3}^k \cdots + A_n {e_n}^k$

である。㊚

(定理 1)

$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = e_1$が成り立つ。

(証明)

[1] $n = 1$のとき,

$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = 1$であり，成り立つ。

[2] $n \geq 2$のとき,

(命題 2)より数列$\left\{F_k^{(n)}\right\}$の一般項は次のようになる。

$$F_k^{(n)} = A_1 e_1^k + A_2 e_2^k + A_3 e_3^k + \cdots + A_n e_n^k$$

この$e_1, e_2, e_3, \cdots, e_{n-1}, e_n$のうち，その絶対値が最大のものを$e_1$とすると,

$$\frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \frac{A_1 e_1^{k+1} + A_2 e_2^{k+1} + \cdots + A_{n-1} e_{n-1}^{k+1} + A_n e_n^{k+1}}{A_1 e_1^k + A_2 e_2^k + \cdots + A_{n-1} e_{n-1}^k + A_n e_n^k}$$

$$= \frac{A_1 e_1 + A_2 e_2 \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^k + \cdots + A_{n-1} e_{n-1} \left(\frac{e_{n-1}}{e_1}\right)^k + A_n e_n \left(\frac{e_n}{e_1}\right)^k}{A_1 + A_2 \left(\frac{e_2}{e_1}\right)^k + \cdots + A_{n-1} \left(\frac{e_{n-1}}{e_1}\right)^k + A_n \left(\frac{e_n}{e_1}\right)^k}$$

ここで，(命題 1)よりe_1の絶対値が他の解の絶対値より大きいから

$\left|\frac{e_a}{e_1}\right| < 1 \ \ (a = 2,3,4, \cdots, n)$より,

$\lim_{k \to \infty} \left(\frac{e_a}{e_1}\right)^k = 0 \ \ (a = 2,3,4, \cdots, n)$である。

よって，$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = \frac{A_1 e_1}{A_1} = e_1$である。

[1]と[2]より，$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = e_1$が成り立つ。終

(定理 2)

$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}\right) = 2$が成り立つ。

(証明)

関数$f_n(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$とおく。

方程式$f_n(x) = 0$は(補題 1-1)より，正の実数解をただ 1 つもち，この解を$e_1^{(n)}$とおく。

(定理 1)より$\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}} = e_1^{(n)}$であるから,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{k \to \infty} \frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}\right) = 2 \ \Leftrightarrow \ \lim_{n \to \infty} \left(e_1^{(n)} - 2\right) = 0$$

である。

ゆえにnについての数列$\left\{e_1^{(n)}\right\}$について,

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ s.t.$

$$\forall n \in \mathbb{N} \left(n \geq N \Rightarrow \left|e_1^{(n)} - 2\right| < \varepsilon\right)$$

を示せばよい。

[1] $0 < n < 1$のとき,

(補題 1-2)より$1 \leq e_1^{(n)} < 2$であるから,

$$\left|e_1^{(n)} - 2\right| < \varepsilon \ \Leftrightarrow \ e_1^{(n)} > 2 - \varepsilon$$

である。また，$f_n(x)$について,

$f_n(2) = 1$かつ$f_n\left(e_1^{(n)}\right) = 0$かつ方程式

$f_n(x) = 0$はただ 1 つ正の実数解をもつから,

$$0 = f_n\left(e_1^{(n)}\right) > f_n(2 - \varepsilon) \ \Rightarrow \ e_1^{(n)} > 2 - \varepsilon$$

である。ゆえに,

$\forall \varepsilon \ \exists N \in \mathbb{N} \ \ s.t.$

$$\forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow f_n(2 - \varepsilon) < 0)$$

を示せばよい。

$$f_n(2 - \varepsilon)$$

$$= (2 - \varepsilon)^n - \sum_{k=0}^{n-1} (2 - \varepsilon)^k$$

$$= (2 - \varepsilon)^n - \frac{(2 - \varepsilon)^n - 1}{(2 - \varepsilon) - 1}$$

$$= \frac{(2 - \varepsilon)^n (1 - \varepsilon) - (2 - \varepsilon)^n + 1}{1 - \varepsilon}$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon}\{1-\varepsilon(2-\varepsilon)^n\}$$

ここで$0<\varepsilon<1$より$2-\varepsilon>1$であるから，$\forall\varepsilon$に対して$\varepsilon(2-\varepsilon)^N>1$を満たす$N\in\mathbb{N}$が存在する。また，$n$が増加すると$\varepsilon(2-\varepsilon)^n$も増加するから，$\varepsilon(2-\varepsilon)^N>1$を満たす$N\in\mathbb{N}$に対して，

$\forall n\in\mathbb{N}(n\geq N\Rightarrow f_n(2-\varepsilon)<0)$が成り立つ。よって，$\frac{1}{1-\varepsilon}>0$であるから，

$\forall\varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t.$

$$\forall n\in\mathbb{N}(n\geq N\Rightarrow f_n(2-\varepsilon)<0)$$

が成り立つ。

したがって，

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t.$

$$\forall n\in\mathbb{N}\left(n\geq N\Rightarrow\left|e_1^{(n)}-2\right|<\varepsilon\right)$$

が成り立つ。

[2] $\varepsilon\geq 1$のとき，

(補題 1-2)より，$n\geq 2$のとき，$1<e_1^{(n)}<2$であるから，

$$\left|e_1^{(n)}-2\right|<1\leq\varepsilon$$

よって，$\forall\varepsilon$に対して，$N=2$は

$\forall\varepsilon\in\mathbb{N}\left(n\geq N\Rightarrow\left|e_1^{(n)}-2<\varepsilon\right|\right)$を満たす。

したがって，

$\forall\varepsilon\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t.$

$$\forall n\in\mathbb{N}\left(n\geq N\Rightarrow\left|e_1^{(n)}-2\right|<\varepsilon\right)$$

が成り立つ。

[1], [2]より，

$\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ s.t.$

$$\forall n\in\mathbb{N}\left(n\geq N\Rightarrow\left|e_1^{(n)}-2\right|<\varepsilon\right)$$

が成り立つから，

$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{k\to\infty}\frac{F_{k+1}^{(n)}}{F_k^{(n)}}\right)=2$が成り立つ。㊎

結論

nナッチ数列の隣接 2 項間の比の極限は収束し，その収束値は方程式$x^n-x^{n-1}-x^{n-2}-\cdots-x^2-x-1=0$の解のうち，最も絶対値が大きい解である。また，その収束値はnについて単調増加で，$n\to\infty$で 2 に収束する。

謝辞

今回の研究で貴重なご指導をして下さった愛媛大学大学院理工学研究科数理物質科学専攻 寺本有花先生にこの場を借りてお礼申し上げます。

引用・参考文献

1. 青空学園数学科「スツルムの定理 根の限界」,http://aozoragakuen.sakura.ne.jp/taiwa/taiwaNch02/node26.html , 2021/9/22 最終閲覧
2. OKWAVE 「トリボナッチ数列とコーシー列」,https://okwave.jp/qa/q8138410.html , 2021/9/22 最終閲覧
3. 結城浩 「ミルカさんとフィボナッチ数列」 ,https://www.hyuki.com/story/genfunc.pdf , 2021/9/26 最終閲覧
4. 高校数学の美しい物語 「因数定理とその重解バージョンの証明」 ,https://manabitimes.jp/math/1050 , 2021/9/27 最終閲覧
5. 啓林館.Focus Gold .4thEdition,数学Ⅱ＋B,p.534-535
6. 啓林館.Focus Gold .4thEdition,数学Ⅲ,p.238-239