Chapter 3

第Ⅰ部　物体の運動とエネルギー

落体の運動

QR

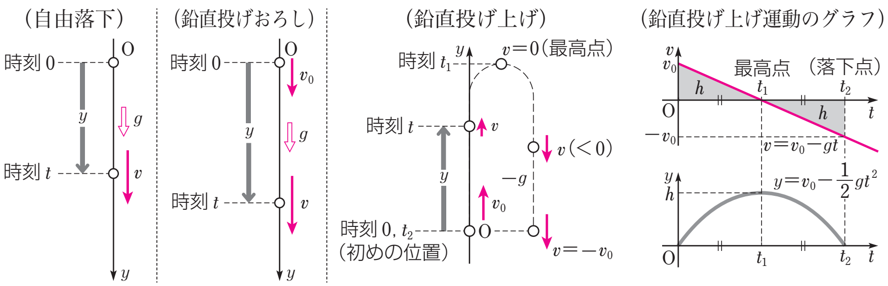
1 落体の運動

【1】重力加速度　重力による運動の加速度は，空気抵抗が無視できれば，物体の形や質量によらず一定とみなせる。鉛直下向きで加速度の大きさはおよそ $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$。

【2】自由落下　初速度 0 で落下する運動。

【3】鉛直投げおろし　初速度 v_0〔m/s〕で投げおろす運動。

【4】鉛直投げ上げ　初速度 v_0〔m/s〕で投げ上げる運動。



	y 軸の向き	加速度	等加速度直線運動の式		
自由落下	下向き正	g	$v=gt$	$y=\frac{1}{2}gt^2$	$v^2=2gy$
鉛直投げおろし	下向き正	g	$v=v_0+gt$	$y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=2gy$
鉛直投げ上げ	上向き正	$-g$	$v=v_0-gt$	$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$	$v^2-v_0^2=-2gy$

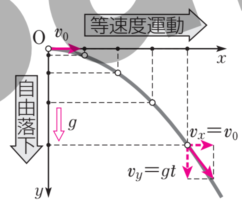
発展

2 放物運動

【5】水平投射　初速度 v_0〔m/s〕で水平方向に投げ出す。

水平方向…速度 v_0 の等速度運動
鉛直方向…自由落下

$$v_x=v_0,\quad v_y=gt,\quad x=v_0t,\quad y=\frac{1}{2}gt^2$$

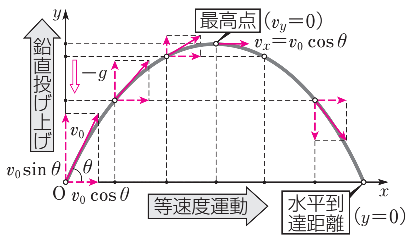


【6】斜方投射　初速度 v_0〔m/s〕で仰角 θ の向きに投げ出す。

水平方向…速度 $v_0\cos\theta$ の等速度運動
鉛直方向…初速度 $v_0\sin\theta$ の鉛直投げ上げ

$$v_x=v_0\cos\theta,\quad v_y=v_0\sin\theta-gt$$

$$x=v_0\cos\theta\times t,\quad y=v_0\sin\theta\times t-\frac{1}{2}gt^2$$

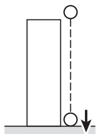


t〔s〕：時刻　g〔m/s²〕：重力加速度の大きさ
$(v_x,\ v_y)$〔m/s〕：時刻 t〔s〕における速度成分
$(x,\ y)$〔m〕：時刻 t〔s〕における位置(座標)

Step1

→ 解答編 p.20～21

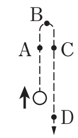
1 自由落下　塔の上から小石を静かに落としたところ，3.0 s 後に地面に達した。塔の高さは何 m か。また，小石が地面に達する直前の速さは何 m/s か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【2】



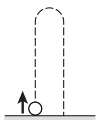
2 自由落下　地面からの高さ h〔m〕の位置から小球を静かに落としたとき，地面に達するまでの時間は何 s か。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。 ↳【2】

3 鉛直投げおろし　高さ 100 m の塔の上から，初速度 20 m/s で小石を鉛直下向きに投げおろした。2.0 s 後の小石の速さは何 m/s か。また，そのときの地面からの高さは何 m か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【3】

4 鉛直投げ上げ　ある速さで物体を鉛直上向きに投げ上げた。図中の点 A～D における加速度は何 m/s² か。ただし，A は上昇途中，B は最高点，C は下降途中で投げ出した点よりも高い位置，D は下降途中で投げ出した点よりも低い位置である。また，鉛直上向きを正とし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【4】



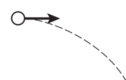
5 鉛直投げ上げ　地面から初速度 14.0 m/s で物体を鉛直上向きに投げ上げた。1.0 s 後の物体の速さは何 m/s か。また，そのときの地面からの高さは何 m か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【4】



6 鉛直投げ上げ　物体を鉛直上向きに投げ上げたところ，最高点で投げ上げた地点から 40 m の高さに達した。初速度の大きさと最高点での速さはそれぞれ何 m/s か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【4】

7 鉛直投げ上げ　地面から小球を初速度 v_0〔m/s〕で鉛直上向きに投げ上げた。投げ上げてから最高点に達するまでの時間は何 s か。また，地面から最高点までの高さは何 m か。ただし，重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。 ↳【4】

発展 **8 水平投射**　十分に高いところから，水平方向に初速度 10 m/s で物体を投げたとき，4.0 s 後の速度の水平成分の大きさと鉛直成分の大きさはそれぞれ何 m/s か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【5】

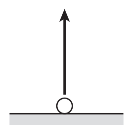


発展 **9 斜方投射**　小石を地面から仰角 30° の向きに，初速度 20 m/s で投げた。2.0 s 後の速度の水平成分の大きさと鉛直成分の大きさはそれぞれ何 m/s か。ただし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s² とする。 ↳【6】

答　1 44 m，29 m/s　2 $\sqrt{\frac{2h}{g}}$〔s〕　3 40 m/s，40 m　4 いずれも -9.8 m/s²　5 4.2 m/s，9.1 m
6 28 m/s，0 m/s　7 $\frac{v_0}{g}$〔s〕，$\frac{v_0^2}{2g}$〔m〕　8 10 m/s，39 m/s　9 17 m/s，9.6 m/s

基本例題 5　鉛直投げ上げ　→ 26 / 30 / 31

小球を地上から真上に投射すると，4.0 s 後に地上に落ちてきた。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



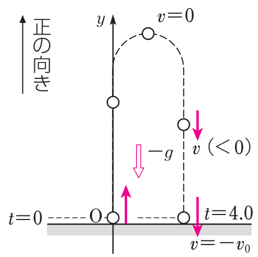
(1)　小球の初速度の大きさはいくらか。
(2)　小球を投げ上げてから最高点に達するまでの時間はいくらか。
(3)　小球の達する最高点の高さはいくらか。
(4)　小球が地面からの高さ 14.7 m の地点を通過するのは，投げ上げてから何 s 後か。

指針　問題文を読み解く。

①　「真上に投射すると」→鉛直投げ上げ
　鉛直投げ上げの運動は最高点に対して対称
　(↳センサー 8)
②　初めの運動の向き(鉛直上向き)を正にとる。
③　「最高点」→速度が 0 の点
④　等加速度直線運動の式を利用する。

$v=v_0+at$　$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$　$v^2-v_0{}^2=2ax$

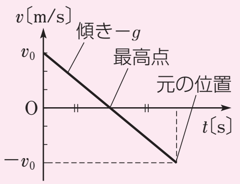
指針　問題の状況を図にする。



センサー 8
上昇中の運動と下降中の運動は最高点に対して対称

補 最高点まで上昇する時間と元の位置まで下降する時間は等しい。また，上昇中と下降中の同じ高さにおける速さも等しい。

センサー 9
鉛直投げ上げ運動の場合，投げ上げた位置を原点，鉛直上向きを正として，
最高点→速度 $v=0$
元の位置→変位 $y=0$
原点より下の位置
　→変位 y は負



解説 (1)　鉛直上向きを正として，地上からの位置を y〔m〕，初速度を v_0〔m/s〕とする。地上に落ちてきたとき，$t=4.0$ s，$y=0$ m なので，

$0=v_0\times4.0+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times4.0^2$ ← $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

ゆえに，$v_0=19.6≒$ **20 m/s**

(2)　最高点では $v=0$ m/s なので，求める時間を t〔s〕とすると，

$0=19.6-9.8t$ ← $v=v_0+at$　　ゆえに，$t=$ **2.0 s**

別解　鉛直投げ上げ運動の場合，地上と最高点との間での上昇するのにかかる時間と下降するのにかかる時間は等しいので，
$4.0\div2=$ **2.0 s**

(3)　最高点では $v=0$ m/s なので，求める高さを y〔m〕とすると，

$0^2-19.6^2=2\times(-9.8)\times y$ ← $v^2-v_0{}^2=2ax$

ゆえに，$y=19.6≒$ **20 m**

別解　(2)より，最高点に達するまでの時間は 2.0 s なので，

$y=19.6\times2.0+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times2.0^2$ ← $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

$=19.6≒$ **20 m**

(4)　求める時刻を t〔s〕とすると，

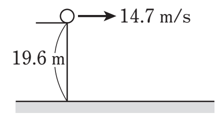
$14.7=19.6t+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times t^2$ ← $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

整理すると，$t^2-4.0t+3.0=0$　　よって，$(t-1.0)(t-3.0)=0$

ゆえに，$t=1.0$ s，3.0 s　　**答 1.0 s 後と 3.0 s 後**

発展 基本例題 6　水平投射　→ 27 / 28 / 32

高さ 19.6 m のビルの屋上から，水平方向に初速度の大きさ 14.7 m/s でボールを投げた。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。



(1)　ボールが地面に達するまでの時間 t〔s〕はいくらか。
(2)　ボールが地面に達するまでに，水平方向に飛んだ距離 L〔m〕はいくらか。
(3)　地面に達する直前のボールの速さ v〔m/s〕はいくらか。

センサー 10
水平投射の場合，鉛直方向(自由落下)と水平方向(等速度運動)に分けて考える。

解説 (1)　鉛直方向には自由落下をするので，

$19.6=\frac{1}{2}\times9.8t^2$ ← $y=\frac{1}{2}gt^2$　　ゆえに，$t=$ **2.0 s**

(2)　水平方向には等速度運動と同じ運動をするので，

$L=14.7\times2.0=29.4≒$ **29 m** ← $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

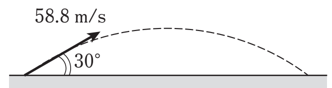
(3)　速度の水平成分を v_x〔m/s〕，鉛直成分を v_y〔m/s〕とすると，

$v_x=14.7$ m/s，$v_y=9.8\times2.0=19.6$ m/s ← $v=v_0+at$

よって，$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{14.7^2+19.6^2}=24.5≒$ **25 m/s**
↑速度の合成

発展 基本例題 7　斜方投射　→ 29 / 33 / 34

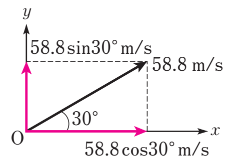
水平な地面から仰角 30° の向きに，初速度 58.8 m/s でボールを打ち出した。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし，有効数字 2 桁で答えよ。



(1)　ボールの初速度の水平成分と鉛直成分は，それぞれいくらか。
(2)　ボールが最高点に達するまでの時間はいくらか。また，最高点の高さはいくらか。

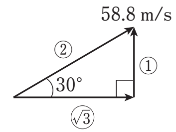
センサー 11
斜方投射の場合，鉛直方向(鉛直投げ上げ)と水平方向(等速度運動)に分けて考える。

解説 (1)　右図のように初速度を水平方向と鉛直方向に分解する。水平右向きに x 軸，鉛直上向きに y 軸をとり，初速度の水平成分を v_{0x}〔m/s〕，鉛直成分を v_{0y}〔m/s〕とすると，



$v_{0x}=58.8\cos30°=58.8\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$≒29.4\times1.73=50.862≒$ **51 m/s**



$v_{0y}=58.8\sin30°=58.8\times\frac{1}{2}=29.4$

$≒$ **29 m/s**

(2)　最高点では速度の y 成分 $v_y=0$ なので，求める時間を t〔s〕とすると，

$0=29.4-9.8t$ ← $v=v_0+at$　　ゆえに，$t=$ **3.0 s**

また，最高点の高さを y'〔m〕とすると，

$y'=29.4\times3.0+\frac{1}{2}\times(-9.8)\times3.0^2$ ← $x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$

$=44.1≒$ **44 m**

Step2

→ 解答編 p.21 ～ 29

知識

20 自由落下　地上から高さ 78.4 m の建物の屋上から，小球を自由落下させた。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1)　落下し始めてから 2.0 s 間の小球の落下距離はいくらか。

(2)　40 m 落下したときの小球の速さはいくらか。

(3)　小球が地面に達するまでの時間はいくらか。また，そのときの速さはいくらか。

知識

21 自由落下　高さ h のビルの屋上から，小球を自由落下させた。この小球が，屋上からビルの半分の高さに達するまでの時間は，その後，ビルの半分の高さから地面に達するまでの時間の何倍になるか。なお，平方根を用いて答えてよい。

知識

22 鉛直投げおろし　橋の上から，小石を鉛直下向きに 4.9 m/s の速さで投げおろしたところ，3.0 s 後に水面に達した。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

(1)　小石を投げた点の水面からの高さはいくらか。

(2)　小石が水面に達するときの速さはいくらか。

(3)　小石を投げる速さを 4 倍にすると，水面に達するまでの時間はいくらになるか。

知識

23 自由落下と投げおろし　小球 A を自由落下させた 1.0 s 後に，A を自由落下させたのと同じ位置から小球 B を投げおろしたところ，B を投げおろした 2.0 s 後に，B は A に追いついた。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

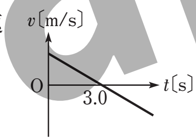
(1)　B が A に追いつくまでに落下した距離はいくらか。

(2)　B が A に追いついたときの A の速さはいくらか。

(3)　B の初速度の大きさはいくらか。

知識

グラフ **24 鉛直投げ上げ**　右図は，地上から鉛直上向きに投げ上げた小球の速度 v〔m/s〕と時刻 t〔s〕との関係を示したものである。ただし，時刻 $t=0$ s に小球を投げ上げたとし，重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。



(1)　投げ上げた小球の初速度の大きさはいくらか。

(2)　小球が達する最高点の高さはいくらか。

(3)　投げ上げた小球がはじめの高さに戻るまでの時間はいくらか。　↳センサー 9

知識

25 自由落下と投げ上げ　地面から高さ 120 m の点から物体 A を静かに落とすと同時に，その真下の地面上の点から 30 m/s の初速度で物体 B を真上に投げ上げた。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。

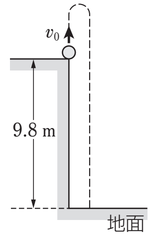
(1)　A と B はいつ，どこで出あうか。

(2)　A と B が出あうときの B の速度を求めよ。

ヒント
21 後半の時間は，全体の時間から前半の時間を引いて求める。
23 (1)　A と B の落下距離は同じ。
24 グラフより，$t=3.0$ s に $v=0$ m/s となっていることがわかる。
25 時間 t は共通。

知識

26 鉛直投げ上げ　右図のように，高さ 9.8 m の建物の屋上から，鉛直上向きに初速度の大きさ v_0〔m/s〕で小球を投げ出したところ，2.0 s 後に地面に達した。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。



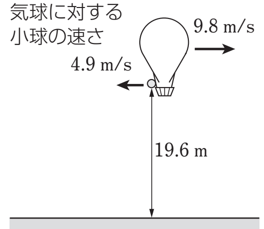
(1)　初速度の大きさ v_0 は何 m/s か。

(2)　小球の速度 v〔m/s〕と時刻 t〔s〕の関係を表す v-t グラフを描け。

(3)　小球が達する最高点の地面からの高さは何 m か。　↳センサー 9

知識

発展 **27 水平投射**　東向きに 9.8 m/s の速さで水平に飛行している気球から，気球に対して 4.9 m/s の速さで西向きに小球を投げ出した。ただし，投げ出した点の地面からの高さは 19.6 m で，小球を投げ出しても気球の速度は変わらなかったとする。重力加速度の大きさを $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ とする。



(1)　小球を投げ出したときの地面に対する小球の速度を求めよ。

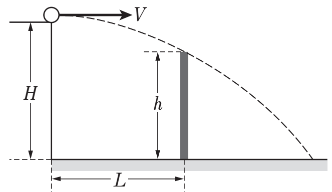
(2)　小球を投げ出してから地面に達するまでの時間はいくらか。

(3)　小球が地面に達した地点は，投げ出した点の真下からどの向きにいくら離れているか。

↳センサー 10

知識

発展 **28 水平投射**　高さ H の建物の塔から，水平方向に初速度 V でボールを投げた。この塔から水平方向に L 離れた地点に高さ $h(<H)$ の壁がある。重力加速度の大きさを g とする。



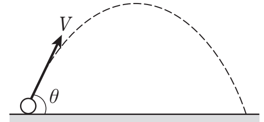
(1)　ボールが水平方向に L 進むまでの時間 t_x を求めよ。

(2)　ボールが壁の高さまで落下する時間 t_y を求めよ。

(3)　ボールが壁を越えて飛んでいく V の条件を答えよ。　↳センサー 10

知識

発展 **29 斜方投射**　図のように，水平面上から仰角 θ の向きに，初速度 V でボールを打ち出した。重力加速度の大きさを g とし，必要があれば $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ を用いること。



(1)　ボールが再び地面に落下するまでの時間を求めよ。

(2)　ボールを打ち出した地点と，落下地点との間の距離を求めよ。

(3)　(2)が最大値になるときの，θ の値を求めよ。　↳センサー 11

ヒント
27 (2)　投げ出された直後の小球の地面に対する速度を，速度の合成を用いて考える。
28 (3)　t_x と t_y の大小関係を考える。等加速度直線運動の式を用いる。
29 (3)　$\sin 2\theta$ が最大のとき，x が最大となる。

Step up 例題1　パターン演習から一歩踏み出す

2 物体の投射運動　図1のように，地面を原点として鉛直上向きに x 軸をとり，速度，加速度の正の向きは x 軸の正の向きとする。

$x=h$〔m〕の位置にある小球Aを速度 v_0〔m/s〕で投げ上げると同時に，小球Aの真下の $x=0$ m の位置から小球Bを速度 $2v_0$〔m/s〕で投げ上げた。小球Aが最高点に達すると同時に小球Bと衝突した。

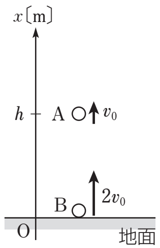


図1

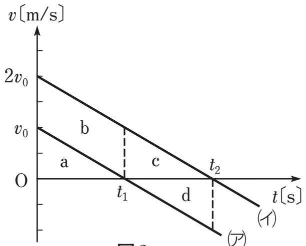


図2

図2は小球Aと小球Bを投げ上げた時刻を $t=0$ s として，2つの小球が衝突しなかった場合の速度 v〔m/s〕と時刻 t〔s〕の関係を表した v-t グラフである。2本の直線(ア)，(イ)は，2つの小球のいずれかの運動を表している。

(1)　次の文の空欄①～⑨について，(　)の中には v_0，t_1 から必要なものを用いて適切な式を，□には図中のa～dの中から適切な選択肢を選び，空欄を埋めよ。

図2より，重力加速度は(①)〔m/s²〕と表せる。小球Aが最高点に達する時刻は(②)〔s〕であり，(イ)の直線が t 軸と交わる時刻 t_2=(③)〔s〕である。

実際は2つの小球は衝突するので，衝突時の小球Bの速度は，図2の v-t グラフから(④)〔m/s〕と読み取れる。また，小球AとBが衝突するまでに小球Aが移動した距離は［ ⑤ ］の面積，小球Bが移動した距離は［ ⑥ ］と［ ⑦ ］の面積の和で表すことができるので，初めの小球Aの地面からの高さは［ ⑧ ］の面積を求めることで，h=(⑨)〔m〕と表すことができる。

(2)　衝突地点の地面からの高さ h' を，h を用いて表せ。

衝突後，小球AとBは一体となり(これを物体Cとする)，瞬間的に速度 $\dfrac{v_0}{2}$ で鉛直上向きに動き出した。

(3)　小球Aと小球Bが衝突した時刻から，衝突時の高さに落下するまでの間の物体Cの運動について，v-t グラフを図3に描き加えよ。

(4)　物体Cが達する最高点の地面からの高さを，h を用いて表せ。

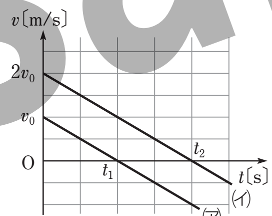


図3

指針

知識確認　この問題の基本となる知識をおさえよう。

v-t グラフの傾きは加速度を，面積は物体の移動距離を表す。

考えてみよう　グラフを用いながら，問題の内容を明確にする。

投射運動の問題は，等加速度直線運動の式を用いて考えることが多いが，グラフとあわせて考察すると，物体の運動をより深く理解することができる。

特に，グラフを扱うことにより，物体の運動を視覚的に理解できるだけではなく，複数の物体の運動を同時に確認することができる。

解説　(1)①　重力加速度を g〔m/s²〕とすると，加速度は v-t グラフの傾きに一致するから，

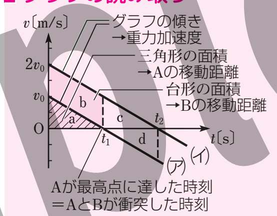
$$g=\frac{0-v_0}{t_1-0}=\boldsymbol{-\frac{v_0}{t_1}}\text{〔m/s}^2\text{〕}$$

②　$t=0$ s での速度が v_0〔m/s〕である(ア)のグラフが小球Aである。最高点では $v=0$ m/s となるので，このときの時刻は $\boldsymbol{t_1}$〔s〕

③　(イ)は小球Bの v-t グラフで，傾きは(ア)と同じ g〔m/s²〕なので，t_2= $\boldsymbol{2t_1}$〔s〕

④　衝突時刻は小球Aが最高点に達した時刻 t_1〔s〕だから，このときの小球Bの速度は，グラフより $\boldsymbol{v_0}$〔m/s〕

グラフの読み取り



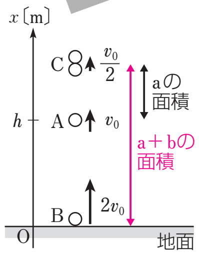
⑤～⑧　a～dは左の図のような関係にあるから，⑤は **a**，⑥，⑦はそれぞれ **a，b(順不同)**，⑧は **b** である。

⑨　v-t グラフのbの面積(平行四辺形の面積)より，

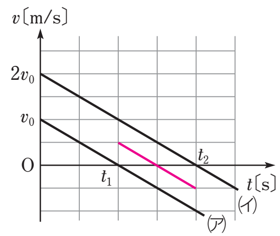
$$h=v_0\times t_1=\boldsymbol{v_0t_1}\text{〔m〕}$$

(2)　h' は時刻 t_1〔s〕における小球Bの移動距離に等しいから，aの面積とbの面積の和を求めると，

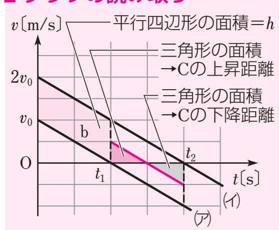
$$h'=\frac{1}{2}\times(v_0+2v_0)\times t_1=\frac{3}{2}v_0t_1=\boldsymbol{\frac{3}{2}h}\text{〔m〕}$$



(3)　物体Cは時刻 t_1〔s〕に速度 $\dfrac{v_0}{2}$〔m/s〕，加速度は小球A，Bと同じ $-\dfrac{v_0}{t_1}$ なので，(ア)，(イ)と同じ傾きであることを考慮すると，**右図**のようになる。これより，物体Cが最高点に達する時刻は $\dfrac{3}{2}t_1$〔s〕，衝突時と同じ高さに落下する時刻は $t_2=2t_1$〔s〕であることがわかる。

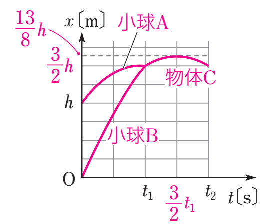


グラフの読み取り



(4)　物体Cの上昇距離は，左図の三角形の面積に等しい。これは，bの平行四辺形の面積 h〔m〕の面積の $\dfrac{1}{8}$ なので，地面からの高さは，

$$\frac{3}{2}h+\frac{1}{8}h=\boldsymbol{\frac{13}{8}h}\text{〔m〕}$$

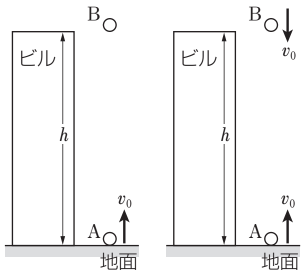


第I部

応用例題 2　鉛直投げ上げと自由落下・鉛直投げおろし　→ 9 10 19

地面の高さに小球 A が，高さ h のビルの屋上の高さに小球 B がある。小球 A と小球 B は同一鉛直線上にあり，重力加速度の大きさを g とする。

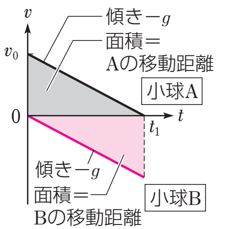
(1)　小球 A を鉛直上向きに速さ v_0 で打ち上げると同時に，小球 B を自由落下させたところ，小球 A が最高点に達した瞬間に小球 B と衝突した。衝突するまでの間の B に対する A の相対速度の大きさを v_0 を用いて表せ。また，ビルの高さ h を v_0，g を用いて表せ。



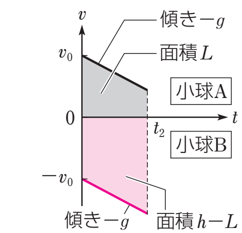
(2)　小球 A を鉛直上向きに速さ v_0 で打ち上げると同時に，小球 B を鉛直下向きに速さ v_0 で投げおろした。小球 A と小球 B が衝突する位置の地面からの高さは h の何倍か。

補 B に対する A の相対速度の大きさが v_0 という結果は，時間 t によらないということで，B から見ると A は等速で近づいているように見える。（A から見ても B は等速で近づいているように見える。）

(1)小球の運動の v-t グラフ
（鉛直上向きを正とする）



(2)小球の運動の v-t グラフ
（鉛直上向きを正とする）



解説　A，B が動き出した時刻を $t=0$ とし，鉛直上向きを正とする。

(1)　A と B が動き出してから衝突するまでの時間 t における速度をそれぞれ v_A，v_B とすると，$v=v_0+at$ より，

$v_A=v_0-gt$，$v_B=0-gt$

B に対する A の相対速度を v_{BA} とすると，

$v_{BA}=v_A-v_B=v_0-gt-(-gt)=\boldsymbol{v_0}$

この結果は，B から A を見ると時間 t によらず一定の速さ v_0 で近づいているということである。小球 A が最高点に達する時刻を t_1 とすると，$v=v_0+at$ より，

$0=v_0-gt_1$　ゆえに，$t_1=\dfrac{v_0}{g}$

B から見ると，A ははじめ距離 h だけ離れており，一定の速さ v_0 で近づいてきて時刻 t_1 に衝突するので，

$h=v_0t_1=v_0\times\dfrac{v_0}{g}=\boldsymbol{\dfrac{v_0^2}{g}}$

(2)　(1)と同様に，小球 A と B が衝突するまでの速度をそれぞれ v_A'，v_B'，B から見た A の相対速度を v_{BA}' とすると，

$v_A'=v_0-gt$，$v_B'=-v_0-gt$

$v_{BA}'=v_A'-v_B'=v_0-gt-(-v_0-gt)=2v_0$

となり，B から見ると A は時間によらず一定の速さ $2v_0$ で近づいているように見える。衝突する時刻 t_2 は $t_2=\dfrac{h}{2v_0}$ となるので，

衝突する位置の地面からの高さ L は，$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ より，

$L=v_0\times\dfrac{h}{2v_0}-\dfrac{1}{2}g\times\left(\dfrac{h}{2v_0}\right)^2=\dfrac{h}{2}-\dfrac{gh^2}{8v_0^2}$　（小球 A に対する式）

したがって，(1)の結果を用いて v_0^2，g を消去すると，

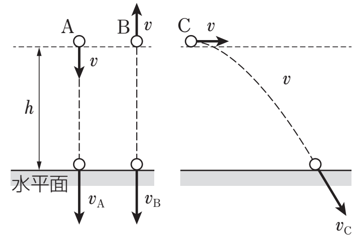
$L=\dfrac{h}{2}-\dfrac{h^2}{8h}=\dfrac{3}{8}h$　　ゆえに，$\boldsymbol{\dfrac{3}{8}}$**倍**

応用例題 3　鉛直投げ上げ・鉛直投げおろし・水平投射　→ 25 26 28 29

水平面からの高さ h の位置から速さ v で小球を投げ出す。重力加速度の大きさを g とする。

(1)　鉛直下向きに投げ出したとき（右図 A），水平面に達するまでの時間を求めよ。

(2)　鉛直下向き（右図 A）と鉛直上向き（右図 B）に投げ出して水平面に達したときの速さをそれぞれ v_A，v_B とすると，v_A と v_B ではどちらが速いか。



(3) 発展　水平右向きに投げ出して（右図 C）水平面に達したときの速さを v_C とするとき，v_C を v_A，v_B と比較せよ。

解説　(1)　求める時間を t〔s〕とすると，鉛直下向きを正として，

$x=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$ より，

$h=vt+\dfrac{1}{2}gt^2$　よって，$gt^2+2vt-2h=0$

この式を t について解くと，2 次方程式の解の公式より，

$t=\dfrac{-v\pm\sqrt{v^2+2gh}}{g}$

2 次方程式
$ax^2+2b'x+c=0$ の解
$x=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$

ゆえに，$t>0$ なので，$t=\boldsymbol{\dfrac{-v+\sqrt{v^2+2gh}}{g}}$〔s〕（$t<0$ は不適）

補 $\sqrt{v^2+2gh}>v$ なので，$-v+\sqrt{v^2+2gh}>0$ となる。

(2)　鉛直下向きを正とすると，$v^2-v_0^2=2ax$ より，

A：$v_A^2-v^2=2gh$　　よって，$v_A=\sqrt{v^2+2gh}$

B：$v_B^2-(-v)^2=2gh$　　よって，$v_B=\sqrt{v^2+2gh}$

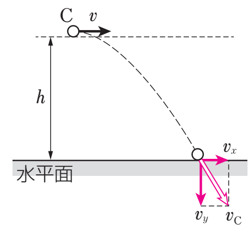
ゆえに，v_A と v_B は **同じ速さ（$v_A=v_B$）** である。

別解　図 B において，もとの高さ（高さ h）に戻ってきたときの速さは，運動の対称性から下向きに v である。よって，B でも，もとの高さに戻って以降は A と同じ運動をするから，

$\boldsymbol{v_A=v_B}$

補 同じ高さから同じ速さで投げ出したとき，地面に達したときの速さは投げ出した向きによらず同じになる。この結果は Chapter6 で扱う力学的エネルギー保存の法則（→ p.63）を考慮すると明らかである。

(3)　水平方向に投げ出したとき，水平面に達したときの速度の水平成分を v_x，鉛直成分を v_y とする。水平方向には等速度運動をするので，$v_x=v$ となる。鉛直方向は自由落下運動となるので，$v^2-v_0^2=2ax$ より，



$v_y^2-0^2=2gh$　よって，$v_y^2=2gh$

したがって，三平方の定理より，

$v_C=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{v^2+2gh}$

ゆえに，v_C は v_A，v_B と **同じ速さ** である。

第Ⅰ部

Step3

→ 解答編 p.29～34

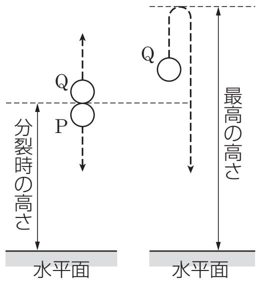
知識
30 気球からの鉛直投げ上げ　一定の速さ 4.4 m/s で鉛直に上昇している気球から，鉛直上向きに小石を投げ上げたところ，4.0 s 後に小石と気球はすれ違った。ただし，小石を投げ上げても気球の速度は変わらないものとし，重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とする。

(1)　小石を投げ上げたときの小石の地上から見た初速度を求めよ。

(2)　すれ違うときの，気球に乗っている人から見た小石の速度を求めよ。

(3)　小石は気球とすれ違ってから 2.0 s 後に地面に達した。小石を投げ上げたときの気球の高さは，地上からいくらか。

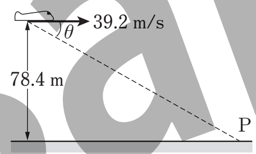
知識
31 鉛直投げ上げと鉛直投げおろし　図のように，小物体を水平面から垂直に打ち上げたところ，小物体は速度が 0 になった瞬間に 2 個の小物体 P，Q に分裂した。P，Q は上下に分裂し，分裂後の P，Q の速さは等しかった。P は分裂後から時間 T 後に水平面上に落下し，Q は分裂から時間 $2T$ 後に水平面に落下した。重力加速度の大きさを g とする。



(1)　打ち上げられた物体が分裂したときの水平面からの高さを求めよ。

(2)　Q が到達した最高の高さは水平面からいくらか求めよ。　（19　東京電機大 改）

知識
発展 **32 飛行機から落とした物体の運動**　地上から 78.4 m の高さを 39.2 m/s の速さで水平飛行している飛行機から荷物を静かに落とし，地上の目標 P に命中させたい。重力加速度の大きさを 9.8 m/s^2 とし，有効数字 2 桁で答えよ。

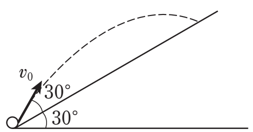


(1)　飛行機から見て，P がどの方向に見えるときに荷物を落とせばよいか。右図の角 θ について，$\tan\theta$ の値を求めよ。

記述 (2)　飛行機から見ると，荷物の運動はどんな運動に見えるか。

(3)　P に命中する直前の荷物の速さはいくらか。

知識
発展 **33 斜面上への斜方投射**　右図のように，水平面と 30° の角をなす斜面の下端から，斜面と 30° の角をなす向きに初速度の大きさ v_0 で小球を打ち出した。重力加速度の大きさを g とする。

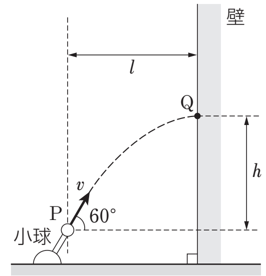


(1)　小球を打ち出してから斜面上に落下するまでの時間はいくらか。

(2)　小球が斜面上に落下する位置の斜面の下端からの距離はいくらか。

ヒント
30　センサー9　すれ違うときは，高さが同じ。
31　センサー9　(1)　P と Q で座標の正の向きをそれぞれ考える。
(2)　分裂後からの上昇分を考える。
32　(1)　荷物の初速度は飛行機の速度に等しい。
33　水平方向と鉛直方向に座標軸をとり，小球が落下する斜面上の点の座標を求める。

知識
発展 **34 斜方投射**　図のように，水平から 60° の斜め上方に小球を発射する装置がある。小球を速さ v で鉛直な壁面に向かって打ち出した。小球は，高さが最高点に達したとき，点 Q で壁面に垂直に衝突した。壁は点 P から水平方向に l だけ離れており，点 Q は点 P より h だけ高い位置にあった。ただし，小球は壁と垂直な鉛直面内を運動し，空気抵抗は無視できるものとする。また，重力加速度の大きさを g とする。

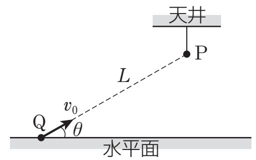


(1)　発射直後から小球が壁に到達するまでの時間 t を，v，l を用いて表せ。

(2)　h を，v，g を用いて表せ。

(3)　h は l の何倍か。文字を使わずに求めよ。　（20　センター試験 改）

知識
発展 **35 斜方投射と自由落下**　天井につるされている小球 P がある。時刻 $t=0$ に小球 Q を水平面上から P に向けて初速度の大きさ v_0 で打ち出すと同時に，P を自由落下させた。初めの P と Q との間の直線距離を L，Q の初速度の向きと水平面とのなす角を θ とする。ただし，重力加速度の大きさを g とする。



(1)　時刻 t における P，Q の水平面からの高さはいくらか。

(2)　Q は P の落下軌道に達するまで水平面に落下しないものとすると，Q が P の落下軌道に達したときの時刻はいくらか。

記述 (3)　(2)の時刻における P，Q の水平面からの高さを求めることによって，この現象でどのようなことが起こるかを簡潔に答えよ。

ヒント
34　(3)　(2)とは別に鉛直投げ上げの式を立てて h を求める。
35　(1)　鉛直方向の運動は，P は自由落下，Q は鉛直投げ上げである。
(2)　Q の水平方向の運動に着目する。