まとめ 1　2次関数のグラフ

1. 関数

2つの変数 x, y があって，x の値を1つ決めると，それに対して，y の値がただ1つ決まるとき，y は x の関数であるといい，$\boldsymbol{y=f(x)}$ で表す．

また，単に，関数 $f(x)$ ということがある．

注》 x がどんな値をとっても「$y=$」が同じ値になる場合，たとえば，$y=3$ であるような場合，これを**定数関数**という．

$y=3x-5$
……1次関数

$y=-x^2$
……2次関数
（$p.77$ 参照）

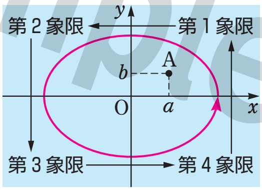
2. 関数の値

関数 $y=f(x)$ について，$x=a$ のときの y の値を $\boldsymbol{f(a)}$ で表す．$f(a)$ を $x=a$ における関数 $f(x)$ の値という．

$f(x)=3x^2-2x+5$ のとき，
$f(a)=3a^2-2a+5$

3. 座標平面と象限

x 軸，y 軸によって分けられている4つの部分を，右の図のように，第1象限，第2象限，第3象限，第4象限という．x 軸，y 軸上の点は，どの象限にも属さない．



第1象限から反時計回り

座標が $(a,\ b)$ である点Aを $\mathrm{A}(a,b)$ と書く．

$\mathrm{A}(a,\ b)$

x 座標　y 座標

4. 関数のグラフ

関数 $y=f(x)$ が与えられたとき，座標平面上で $(x,\ f(x))$ を座標にもつ点全体からなる図形を $y=f(x)$ のグラフという．

5. 定義域・値域

関数 $y=f(x)$ に対し，x のとる値の範囲を，この関数の**定義域**，x が定義域内のすべての値をとるときの y のとる値の範囲を**値域**という．

定義域がとくに示されていない場合，定義域は，関数が意味をもつすべての x の値の範囲で考える．

注》 関数 $y=f(x)$ における最も大きい値を最大値，最も小さい値を最小値という（$p.95$ 参照）．ただし，最大値・最小値はつねに存在するとは限らない．

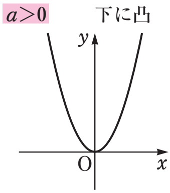
6. 2 次関数 $y=a(x-p)^2+q$（標準形）のグラフ

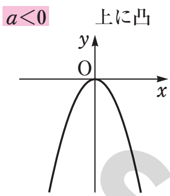
2 次関数…… 2 次式で表される関数

(1)　$y=ax^2$ のグラフ

軸は y 軸（直線 $x=0$）

頂点は原点

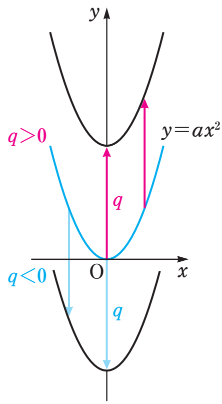




(2)　$y=ax^2+q$ のグラフ

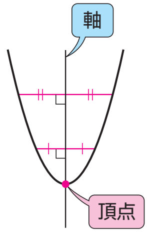
軸は y 軸（直線 $x=0$）

頂点は点 $(0,\ q)$



◀ 2 次関数のグラフの形の曲線を放物線という．

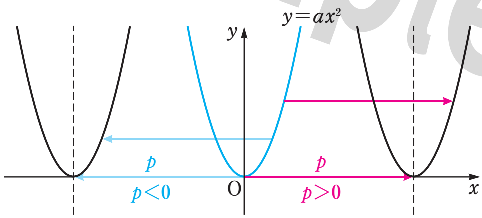
◀ 放物線の対称軸を単に「軸」という．



◀ $y=ax^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，y 軸方向に q だけ平行移動したもの．

(3)　$y=a(x-p)^2$ のグラフ

軸は直線 $x=p$，頂点は点 $(p,\ 0)$



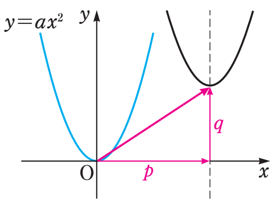
◀ $y=a(x-p)^2$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p だけ平行移動したもの．

(4)　$y=a(x-p)^2+q$（標準形）のグラフ

$y=a(x-p)^2+q$ のグラフは，$y=ax^2$ のグラフを，x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したものである．

軸は直線 $x=p$

頂点は点 $(p,\ q)$



◀ (　)^2 の中の式 $x-p$ を $x-p=0$ とおいて，$x=p$ と求める．

注》 2 次関数のグラフはいずれも軸が y 軸に平行な放物線である．放物線を平行移動しても，2 次の係数は変わらない．

7. 2 次関数 $y=ax^2+bx+c$（一般形）のグラフ

$y=ax^2+bx+c$ の右辺を $y=a(x-p)^2+q$ の形に変形することを平方完成という.

$$
\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\
&=a\left\{x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c\\
&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}
\end{aligned}
$$

◀ $y=a(x-p)^2+q$ に変形できれば，あとは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したグラフとみなせる.

◀ x の係数の半分を 2 乗する.

$x^2+\frac{b}{a}x$
$=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2$

◀ $a\times\left(-\frac{b^2}{4a^2}\right)=-\frac{b^2}{4a}$

$-\frac{b^2}{4a^2}$ を $\{\ \ \}$ の外に出すとき，a を掛けるのを忘れずに.

$y=ax^2+bx+c$ のグラフ

軸は直線 $x=-\frac{b}{2a}$，頂点は点 $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$

Check!

*
1 10 km の道のりを時速 4 km で歩くとき，歩き始めてから x 時間後の残りの道のりを y km とする．このとき，y を x の式で表せ.

*
2 次の関数について，$f(1)$，$f(-1)$，$f(a^2)$，$f(a-1)$ の値を求めよ.

(1)　$f(x)=2x-1$　　(2)　$f(x)=2x^2-3x-1$

*
3 次のような座標をもつ点は，第何象限にあるか.

(1)　A$(-2,\ 4)$　(2)　B$(1,\ -3)$　(3)　C$(1,\ 2)$　(4)　D$(-5,\ -1)$

*
4 **3** の点 A ～ C において，次のような点の座標を求めよ.

(1)　点 A と x 軸に関して対称な点 A′
(2)　点 B と y 軸に関して対称な点 B′
(3)　点 C と原点に関して対称な点 C′

＊**5** 次の関数のグラフをかき，その値域を求めよ．また，最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(1) $y=3x+5$ $(-3\leqq x\leqq 2)$　　(2) $y=-2x+3$ $(-2\leqq x<2)$

(3) $y=\dfrac{1}{2}x^2$ $(-2\leqq x\leqq 1)$　　(4) $y=x^2$ $(-1<x<2)$

＊**6** 関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 5，最小値が -4 のとき，定数 a，b の値を求めよ．ただし，$a>0$ とする．

＊**7** 次の２次関数のグラフをかけ．また，軸および頂点をいえ．

(1) $y=2x^2-3$　　(2) $y=2(x-4)^2$

(3) $y=2(x+3)^2-2$

＊**8** 次の２次関数のグラフをかけ．また，軸および頂点をいえ．

(1) $y=2x^2-8x+9$　　(2) $y=-x^2-6x+3$

(3) $y=2x^2+5x+3$

＊**9** 次の２次関数のグラフは，$y=-3x^2$ のグラフをどのように平行移動したものか．

(1) $y=-3(x-2)^2+9$　　(2) $y=-3x^2-6x+10$

＊**10** 連立方程式 $\begin{cases} a+b+c=8 \\ a+3b-c=2 \\ 3a-2b+c=-3 \end{cases}$ を解け．

▶▶ 解答編 $p.42$

1 $y=10-4x$　**2** (1) $f(1)=1$，$f(-1)=-3$，$f(a^2)=2a^2-1$，$f(a-1)=2a-3$
(2) $f(1)=-2$，$f(-1)=4$，$f(a^2)=2a^4-3a^2-1$，$f(a-1)=2a^2-7a+4$

3 (1) 第２象限　(2) 第４象限　(3) 第１象限　(4) 第３象限

4 (1) $\mathrm{A}'(-2,\ -4)$　(2) $\mathrm{B}'(-1,\ -3)$　(3) $\mathrm{C}'(-1,\ -2)$

5 (1) 値域は，$-4\leqq y\leqq 11$　最大値 11（$x=2$ のとき）　最小値 -4（$x=-3$ のとき）
(2) 値域は，$-1<y\leqq 7$　最大値 7（$x=-2$ のとき）　最小値なし
(3) 値域は，$0\leqq y\leqq 2$　最大値 2（$x=-2$ のとき）　最小値 0（$x=0$ のとき）
(4) 値域は，$0\leqq y<4$　最大値なし　最小値 0（$x=0$ のとき）

6 $a=3$，$b=2$

7 (1) 軸は y 軸（直線 $x=0$），頂点は点 $(0,\ -3)$　(2) 軸は直線 $x=4$，頂点は点 $(4,\ 0)$
(3) 軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ -2)$　（グラフは略）

8 (1) 軸は直線 $x=2$，頂点は点 $(2,\ 1)$　(2) 軸は直線 $x=-3$，頂点は点 $(-3,\ 12)$
(3) 軸は直線 $x=-\dfrac{5}{4}$，頂点は点 $\left(-\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{1}{8}\right)$　（グラフは略）

9 (1) x 軸方向に 2，y 軸方向に 9　(2) x 軸方向に -1，y 軸方向に 13

10 $(a,\ b,\ c)=(-1,\ 3,\ 6)$

Check

例題 30　値域から１次関数の係数決定　＊＊＊＊

関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 3)$ の最大値が 6，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

考え方　グラフをかいて考える．ただし，a の値については条件がないので，
(i)　$a=0$，(ii)　$a>0$，(iii)　$a<0$
で場合分けして考える．

解答　(i)　$a=0$ のとき，$y=b$ で一定の値をとるから，最大値と最小値は一致するので，不適．

(ii)　$a>0$ のとき，グラフは右の図のようになり，

$x=-2$ のとき，最小値 1
$x=3$ のとき，最大値 6

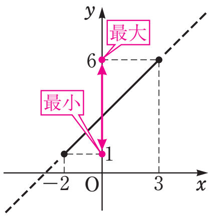
をとるから，

$$\begin{cases} -2a+b=1 \\ 3a+b=6 \end{cases}$$

よって，

$a=1$，$b=3$

これは，$a>0$ を満たす．



(iii)　$a<0$ のとき，グラフは右の図のようになり，

$x=-2$ のとき，最大値 6
$x=3$ のとき，最小値 1

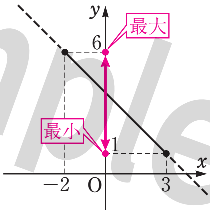
をとるから，

$$\begin{cases} -2a+b=6 \\ 3a+b=1 \end{cases}$$

よって，

$a=-1$，$b=4$

これは，$a<0$ を満たす．



以上から，求める a，b の値は，

$(a,\ b)=(1,\ 3),\ (-1,\ 4)$

◀ $a\neq 0$ のとき，グラフは直線 $y=ax+b$ になり，$a>0$ のとき右上がり，$a<0$ のとき右下がりの直線となる．

◀ 点 $(-2,\ 1)$ と点 $(3,\ 6)$ を通る．

◀ 点 $(-2,\ 6)$ と点 $(3,\ 1)$ を通る．

◀ $\begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases}$ のように書いてもよい．

Focus

最高次の項の係数が文字のときは，その文字と 0 との大小関係により場合分けして考える

練習 30 ＊＊　関数 $y=ax+b$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 4，最小値が 1 のとき，定数 a，b の値を求めよ．

➡ $p.93$ 2

例題 31　定義域によって式が異なる関数のグラフ　＊＊＊＊

関数 $f(x)$ を次のように定義するとき，次の問いに答えよ．

$$f(x)=\begin{cases} -x+2 & (1\leqq x\leqq 2) \\ x^2 & (-2\leqq x<1) \end{cases}$$

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

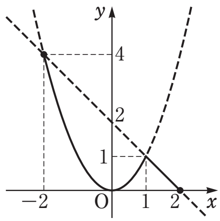
(2)　この関数の最大値，最小値，および，そのときの x の値を求めよ．

第2章

考え方　(1)　定義域によって式が異なる関数においては，式が変わる境目の x，y の値に注意する．また，グラフをかくときは，定義域以外の部分を点線で表すとわかりやすい．

(2)　グラフを用いて考える．最大値，最小値をとるときの x の値については，必ずしも1つではないことに注意する．

解答　(1)　グラフは右の図のようになる．



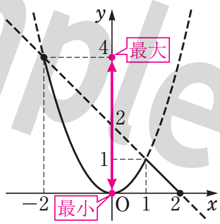
◀定義域以外の部分は点線で表す．

(2)　(1)のグラフより，**最大値 4** をとる．

このとき，　$x=-2$

また，**最小値 0** をとる．

このとき，　$x=0$，2



◀y が最小値のとき，x は2つある（必ずしも1つではない）ことに注意する．

Focus

最大値，最小値をとるときの x の値は必ずしも1つではないことに注意する

練習 31 ＊＊

関数 $f(x)$ を次のように定義するとき，次の問いに答えよ．

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (-1\leqq x\leqq 1) \\ 2x+3 & (-2\leqq x<-1) \end{cases}$$

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ．

(2)　この関数の最大値，最小値，および，そのときの x の値を求めよ．

Check

例題 32 平行移動(1) ＊＊＊＊

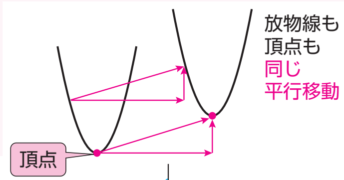
(1) 2次関数 $y=-2x^2-4x+5$ のグラフをかき，軸および頂点をいえ．

(2) 放物線 $y=-x^2+2x+4$ を x 軸方向に -1，y 軸方向に3だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ．

考え方 (1) 一般形 $y=ax^2+bx+c$ を 標準形 $y=a(x-p)^2+q$ に直して，グラフをかく．

平方完成：$x^2+\underbrace{m}_{\text{半分}}x=\left(x+\frac{m}{2}\right)^2-\left(\frac{m}{2}\right)^2$ 2乗

(2) 放物線が平行移動するとき，その放物線の頂点も同様に平行移動することに着目し，まず頂点の移動を考える．



解答1 (1) $y=-2x^2-4x+5$

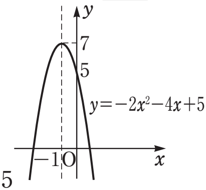
$=-2(x^2+2x)+5$

$=-2\{(x+1)^2-1^2\}+5$

$=-2(x+1)^2+7$

軸は直線 $x=-1$

頂点は点 $(-1,\ 7)$



◀ x^2 の係数 -2 で x^2 と x の項をくくる．

◀ (x の係数の半分)^2

◀ -1 を｛ ｝の外に出すときは，-2 を掛けることに注意．

(2) $y=-x^2+2x+4=-(x-1)^2+5$

となり，この放物線の頂点は点 $(1,\ 5)$ である．

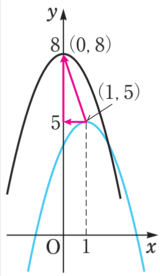
頂点を x 軸方向に -1，y 軸方向に3だけ平行移動すると，

$1+(-1)=0,\quad 5+3=8$

より，求める放物線の頂点は点 $(0,\ 8)$ になる．

x^2 の係数は -1 より，求める放物線の方程式は，

$$y=-x^2+8$$



◀ 次ページの解説参照．

解答2 (2) $\begin{pmatrix} x\text{ 軸方向に } -1 \\ y\text{ 軸方向に } 3 \end{pmatrix}$ だけ平行移動するから，

$\begin{pmatrix} x\text{ を } x-(-1) \\ y\text{ を } y-3 \end{pmatrix}$ におき換えて，

$y-3=-(x+1)^2+2(x+1)+4$

よって， $y=-x^2+8$

◀ $x-(-1)$
$=x+1$

Focus

放物線は平行移動しても2次の係数は変わらない

練習 32 ＊

(1) 次の2次関数のグラフをかけ．また，軸および頂点をいえ．

(ア) $y=-2(x+1)^2-1$　　(イ) $y=x^2+2x-1$

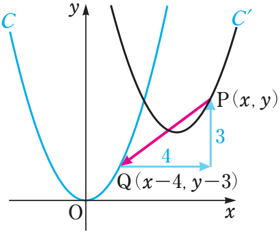
(2) 放物線 $y=2x^2+3x+1$ を x 軸方向に3，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ．

➡ p.93 3

解説
Commentary

「グラフの移動 (1)」

＜グラフの平行移動＞



2 次関数 $y=f(x)$ のグラフについて，これまでは頂点の移動で考えてきたが，別の観点から考えてみよう．

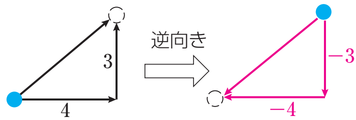
2 次関数 $y=2x^2$ のグラフを C，

$y=2(x-4)^2+3$ のグラフを C'

とすると，C' は C を，

x 軸方向に 4，y 軸方向に 3　……①

だけ平行移動したものである．



ここで，C' 上の点 P$(x,\ y)$ を，①とは逆向きの平行移動，つまり，

x 軸方向に -4，y 軸方向に -3

の平行移動で引き戻した点 Q を考えると，

Q$(x-4,\ y-3)$

となる．

上の図より，点 Q は C 上の点であるから，$y=2x^2$ に代入すると，

$y-3=2(x-4)^2$ より，　$y=2(x-4)^2+3$

となり，C' の方程式になっている．

つまり，　**$y=2x^2$ のグラフを①のように平行移動したグラフの関数は，$y=2x^2$ の　x を $x-4$，　y を $y-3$ におき換えると求められる．**

一般に，

> 関数 $y=f(x)$ のグラフを，
>
> $\left(\begin{array}{l}x \text{ 軸方向に } p\\ y \text{ 軸方向に } q\end{array}\right)$ だけ平行移動したグラフの関数は，
>
> $y=f(x)$ の $\left(\begin{array}{l}x \text{ を } x-p\\ y \text{ を } y-q\end{array}\right)$ におき換えた，
>
> $y-q=f(x-p)$
>
> つまり，　$y=f(x-p)+q$
>
> で表される．

Check

例題 37　2次関数の決定(2)　＊＊＊＊

思考の礎

次の3点を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ．

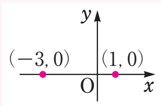
(1)　(1, 6), (3, 6), (−2, −9)　(2)　(1, 0), (−3, 0), (0, −6)

第2章

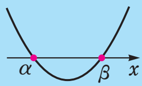
考え方　(1)　頂点や軸の情報がなく，3点が与えられているので，

$y=ax^2+bx+c$（一般形）……㊟ で考えると，㊟に，通る3点の座標の値を代入して，a，b，c の連立方程式を作ることができる．　LOOK 思考の礎

(2)　下の図のように，2点が x 軸上の点の場合はその点の x 座標を関数の式に代入すると $y=0$ となることから，次の式を考える．



$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$
（因数分解形）



解答　(1)　求める2次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく．

この関数のグラフが，

点 (1, 6) を通るから，　$6=a+b+c$ …①

点 (3, 6) を通るから，　$6=9a+3b+c$ …②

点 (−2, −9) を通るから，　$-9=4a-2b+c$ …③

②−① より，$8a+2b=0$　つまり，$4a+b=0$ …④

②−③ より，$5a+5b=15$　つまり，$a+b=3$ …⑤

④，⑤を解いて，　$a=-1$，$b=4$

①に代入して，　$c=3$

よって，求める2次関数は，　$\boldsymbol{y=-x^2+4x+3}$

◀ $y=ax^2+bx+c$ に ①は $x=1$，$y=6$ を ②は $x=3$，$y=6$ を ③は $x=-2$, $y=-9$ をそれぞれ代入

◀ c を消去した2つの式を作る．(④, ⑤)

(2)　x 軸との共有点の座標が (1, 0)，(−3, 0) だから，求める2次関数は，　$y=a(x-1)(x+3)$ とおける．

この関数のグラフが点 (0, −6) を通るから，

$-6=a\cdot(-1)\cdot 3$ より，　$a=2$

よって，求める2次関数は，　$\boldsymbol{y=2(x-1)(x+3)}$

◀ x^2 の係数となる a を忘れないように．

◀ $x=0$，$y=-6$ を代入

◀ $y=2x^2+4x-6$ と答えてもよい．

Focus

3点が与えられたら，$y=ax^2+bx+c$ とおいて代入
x 軸との共有点がわかれば，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ を使う

注》　2次関数の決定は，一般形，標準形，因数分解形を使い分けよう．

①　3点　⟹　$y=ax^2+bx+c$　（一般形）

②　頂点や軸　⟹　$y=a(x-p)^2+q$　（標準形）

③　x 軸との共有点　⟹　$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$　（因数分解形）

また，出てきた2次関数の答えの形は，一般形でも標準形でも因数分解形でもよい．

練習 37　＊＊　次の3点を通る放物線をグラフとする2次関数を求めよ．

(1)　(−1, 4), (2, 1), (3, 8)　　(2)　(−2, 0), (3, 0), (0, 6)

例題 37 思考の礎「いろいろな視点から考える」

前ページの例題 37 では，3 点を通る放物線をグラフとする 2 次関数を，連立方程式を用いて解く方法を学んだが，以下の解き方で考えようとしたことはないだろうか．

求める 2 次関数を $y=a(x-p)^2+q$ とおくと，
この関数のグラフが，
点 $(1,\ 6)$ を通るから，　$6=a(1-p)^2+q$ ……①
点 $(3,\ 6)$ を通るから，　$6=a(3-p)^2+q$ ……②
点 $(-2,\ -9)$ を通るから，　$-9=a(-2-p)^2+q$ ……③
②－①より，　$8a-4ap=0$ ……④
②－③より，　$5a-10ap=15$ ……⑤
④，⑤を解いて，　$a=-1,\ p=2$
①に代入して，

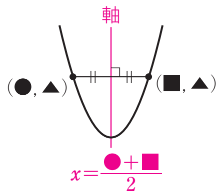
この考え方も間違っていないが，①～③の連立方程式を解く際に，ap や ap^2 が出てくることから連立方程式を解くのが例題の解答と比較すると少し大変となる．

そこで，次の視点で問題を眺めてみることにしよう．

〔視点 1：放物線の対称性を利用する〕
ある 2 次関数が，2 点 (●, ▲), (■, ▲) を通るとき，
この 2 次関数のグラフの軸の方程式は，

$$x=\frac{●+■}{2}$$

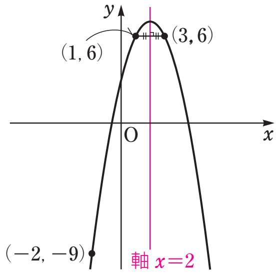
で表される．
（2 次関数のグラフは軸に関して対称）



この考え方を用いると，例題 37 (1)の問題は次のように解ける.

（解答）　グラフが 2 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 6)$ を通るので，

軸の方程式は，　$x=\dfrac{1+3}{2}$



すなわち，$x=2$ となる.

よって，求める 2 次関数は，

$$y=a(x-2)^2+q$$

とおける.

このグラフが 2 点 $(1,\ 6)$，$(-2,\ -9)$ を通るから，

$$\begin{cases} 6=a+q \\ -9=16a+q \end{cases}$$

これを解くと，　$a=-1$，$q=7$

したがって，求める 2 次関数は，

$$y=-(x-2)^2+7$$
$$(y=-x^2+4x+3)$$

〔視点 2：平行移動を利用する〕

3 点 $(1,\ 6)$，$(3,\ 6)$，$(-2,\ -9)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数 $y=f(x)$
+6　+6　+6
は，3 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$，$(-2,\ -15)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数を y 軸方向に 6 だけ平行移動したものである.

2 点 $(1,\ 0)$，$(3,\ 0)$ を通る放物線をグラフとする 2 次関数は

$y=a(x-1)(x-3)$　とおけるので

求める 2 次関数 $y=f(x)$ は

$y=a(x-1)(x-3)+6$　とおける.

この関数のグラフが $(-2,\ -9)$ を通るので，

$$-9=a\cdot(-2-1)\cdot(-2-3)+6$$
$$=15a+6$$ より　$a=-1$

したがって，求める 2 次関数は

$$y=-(x-1)(x-3)+6$$
$$=-x^2+4x+3$$

以上のように，通る点の見方を変えると扱う文字が「3 文字」ではなく「2 文字」，「1 文字」となり，計算が楽になる場合がある.

いろいろな視点から問題を考えることをつねに意識して問題に取り組もう.

Check

例題 38　2次関数の決定(3)　＊＊＊＊

放物線 $y=-x^2$ を平行移動したもので，点 $(1,\ 3)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある放物線をグラフとする2次関数を求めよ．

考え方　与えられた条件を整理すると，次のようになる．

(i)　放物線 $y=-x^2$ を平行移動したもの
(ii)　点 $(1,\ 3)$ を通る
(iii)　頂点が直線 $y=2x+1$ 上にある

(iii)より，**頂点に関する条件** → 標準形 $\boldsymbol{y=a(x-p)^2+q}$ **の形**で考える．
頂点の x 座標を p とすると，
頂点は直線 $y=2x+1$ 上にあるから，頂点の座標は $(p,\ 2p+1)$ とおける．
(i)より，$y=-x^2$ を平行移動しているので，求める2次関数の x^2 の係数も -1 となる．

解答　頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるから，頂点の座標を $(p,\ 2p+1)$ とおく．

◀頂点 $(p,\ q)$ は，直線 $y=2x+1$ 上にあるので，$q=2p+1$ となる．

放物線 $y=-x^2$ を平行移動したものなので，2次の係数は -1 だから，求める2次関数は，
$$y=-(x-p)^2+2p+1$$
とおける．

この関数のグラフが点 $(1,\ 3)$ を通るから，

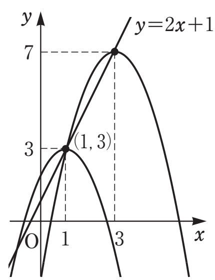
◀$x=1$，$y=3$ を代入

$$3=-(1-p)^2+2p+1$$
$p^2-4p+3=0$ より，　$p=1,\ 3$

$p=1$ のとき，　$y=-(x-1)^2+3$
$p=3$ のとき，　$y=-(x-3)^2+7$

よって，求める2次関数は，
$\boldsymbol{y=-(x-1)^2+3}$
または　$\boldsymbol{y=-(x-3)^2+7}$

注　例題38の条件を満たす放物線は右の図のように2つ存在する．



練習 38 ＊＊＊　放物線 $y=2x^2$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 0)$ を通り，頂点が直線 $y=-2x$ 上にある放物線をグラフとする2次関数を求めよ．

➡ $p.93$ 6

Step Up　２次関数のグラフ

▶▶ 解答編 $p.52$

＊ **1** ← $p.78$

関数 $f(x)=2x^2-x+1$ について，$f(f(a))$ の値を求めよ．

＊＊ **2** ← $p.78$ $p.80$

(1) 関数 $f(x)=mx+n$ について，$f(2)=4$ かつ $f(4)=0$ であるとき，定数 m，n の値を求めよ．

(2) 関数 $y=ax+b$ $(0\leqq x\leqq 3)$ の値域が，$1\leqq y\leqq 4$ となるように定数 a，b の値を定めよ．（久留米大）

＊＊ **3** ← $p.82$ $p.84$

(1) 放物線 $y=x^2+ax+b$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に -1 だけ平行移動した放物線が 2 点 $(2,\ 3)$，$(3,\ 1)$ を通るとき，定数 a，b の値を求めよ．（千葉工業大・改）

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に 3，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものが放物線 $y=ax^2-(2a+2)x-3a+1$ で，軸は直線 $x=3$ になった．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．

＊＊ **4** ← $p.87$

２次関数 $y=-3x^2+12x-7$ のグラフは，$y=3x^2$ のグラフを x 軸の方向に a だけ平行移動し，x 軸に関して対称に折り返し，さらに y 軸の方向に b だけ平行移動したものである．このとき，定数 a, b の値を求めよ．（慶應義塾大）

＊＊ **5** ← $p.88$

放物線 $y=ax^2+bx+c$ は，頂点の座標が $(2,\ 5)$ で，点 $(5,\ -22)$ を通るという．このとき，定数 a，b，c の値を求めよ．（産業能率大）

＊＊＊ **6** ← $p.88$ $p.92$

(1) ２つの放物線 $y=2x^2-12x+17$ と $y=ax^2+6x+b$ の頂点が一致するように定数 a，b の値を定めよ．（神戸国際大）

(2) xy 座標平面において，放物線 $y=x^2-2px+3p+5$ の頂点が直線 $y=2x+3$ 上に存在するように，正の定数 p の値を定めよ．（産業能率大）

Column コラム　「放物線はすべて相似」

すべての放物線は相似であるという．このことについて考えてみよう．

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフは $y=ax^2$ のグラフを平行移動したものであるから，この2つの放物線は“合同”である．

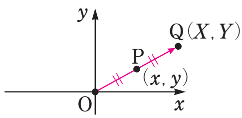
また，$y=ax^2$ のグラフと $y=-ax^2$ のグラフは，x 軸に関して対称であるから，この2つの放物線も“合同”である．

このことから，$a>0$ として，$y=x^2$ のグラフと $y=ax^2$ のグラフが相似であることを示せば，すべての放物線は互いに相似であることがいえる．

まず，$y=x^2$ のグラフを原点Oを中心に2倍に拡大する相似の変換を考えてみる．

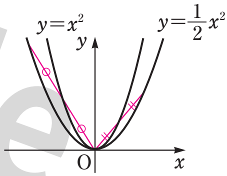
この変換によって，$y=x^2$ のグラフ上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が点 $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ に移るとすると，3点O，P，Qは一直線上にあり，$\mathrm{OQ}=2\mathrm{OP}$ であるから，

$$X=2x,\ Y=2y$$



これより，　$x=\dfrac{X}{2},\ y=\dfrac{Y}{2}$

これを，$y=x^2$ に代入すると，　$\dfrac{Y}{2}=\left(\dfrac{X}{2}\right)^2$



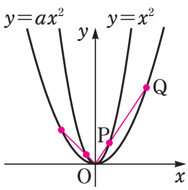
よって，$y=x^2$ は $Y=\dfrac{1}{2}X^2$，つまり，$y=\dfrac{1}{2}x^2$ に移る．

一般の場合について考えてみよう．

原点を通る，ある直線 $y=kx$ を考える．

この直線と放物線 $y=x^2$ の原点以外の共有点をPとすると，Pの座標は $(k,\ k^2)$ となる．

同様に，放物線 $y=ax^2$ との原点以外の共有点をQとすると，$y=kx$ と $y=ax^2$ の連立方程式を解くことにより，Qの座標は $\left(\dfrac{k}{a},\ \dfrac{k^2}{a}\right)$ となる．



よって，　$\dfrac{\mathrm{OQ}}{\mathrm{OP}}=\left|\dfrac{k}{a}\right|\div|k|=\dfrac{1}{a}$　（一定）

つまり，$y=ax^2$ のグラフは，原点を中心にして，$y=x^2$ のグラフを $\dfrac{1}{a}$ 倍に拡大（縮小）したものである．

以上より，すべての放物線は互いに相似である．

（相似…2つの図形があって，一方の図形を拡大または縮小したものと，他方の図形が合同であるとき，この2つの図形は相似であるという．）

Check

例題 41 定義域が広がるときの最大・最小 ＊＊＊＊

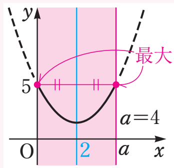
$a>0$ とする．関数 $y=x^2-4x+5$ $(0 \leqq x \leqq a)$ について，次の問いに答えよ．

(1) 最大値を求めよ．　　(2) 最小値を求めよ．

考え方 グラフをかいて考えるとよい．

(1) 与えられた関数のグラフは下に凸で，軸は直線 $x=2$ である．

定義域は a の値が大きくなるにつれて拡大していくので，それにともない定義域の左右のどちらの端点が軸から遠くなるか考えて a について場合分けをする．そのとき，両端点と軸からの距離が等しいとき，つまり，定義域の中央と軸が一致するときに着目する．



ここでは，$0 \leqq x \leqq a$ の中央 $x=\dfrac{a}{2}$ と軸 $x=2$ が一致する場合より，$\dfrac{a}{2}=2$

つまり，$a=4$ のときに着目する．

(2) 下に凸のグラフなので，最小値は定義域に軸が含まれるかどうかで場合分けする．

解答

$y=x^2-4x+5$

$=(x-2)^2+1$

グラフは下に凸で，軸は直線 $x=2$

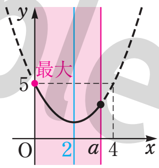
◀場合分けとグラフを用いて考える．

(1) (i) $0<a<4$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=0$ のとき最大となり，

最大値 5



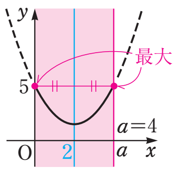
◀定義域 $0 \leqq x \leqq a$ の中央 $x=\dfrac{a}{2}$ と軸 $x=2$ が一致するときに着目して，$\dfrac{a}{2}=2$ つまり $a=4$ を境に場合分けする．

(ii) $a=4$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=0,\ 4$ のとき最大となり，

最大値 5



◀(i) $x=0$ の方が軸から遠い場合

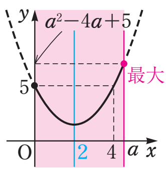
(iii) $x=a$ の方が軸から遠い場合

(iii) $a>4$ のとき

グラフは右の図のようになる．

$x=a$ のとき最大となり，

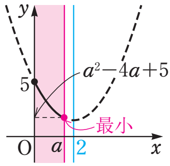
最大値 a^2-4a+5



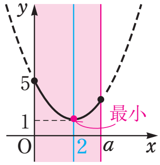
よって，(i)〜(iii)より，

$$\begin{cases} 0<a<4 \text{ のとき，} & \text{最大値 } 5\ (x=0) \\ a=4 \text{ のとき，} & \text{最大値 } 5\ (x=0,\ 4) \\ a>4 \text{ のとき，} & \text{最大値 } a^2-4a+5\ (x=a) \end{cases}$$

(2)　(i)　$0<a<2$ のとき
グラフは右の図のようになり，
軸は定義域に含まれない．
$x=a$ のとき最小となり，
最小値　a^2-4a+5



(ii)　$a \geqq 2$ のとき
グラフは右の図のようになり，
軸は定義域に含まれる．
$x=2$ のとき最小となり，
最小値　1



よって，(i)，(ii)より，

$$\begin{cases} 0<a<2 \text{ のとき，最小値 } a^2-4a+5\ (x=a) \\ a \geqq 2 \text{ のとき，最小値 } 1\ (x=2) \end{cases}$$

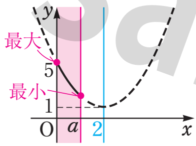
◀定義域に軸が含まれれば，最小となる点は頂点となるので，軸を含むか含まないかで場合分けする．

Focus

最大・最小は定義域と軸の位置関係，グラフの対称性に注目

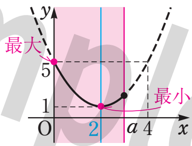
注》　例題 41 において，最大値と最小値をまとめると次のようになる．

(i)　$0<a<2$



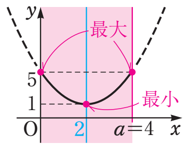
最大値　$5\ (x=0)$
最小値　a^2-4a+5
$(x=a)$

(ii)　$2 \leqq a<4$



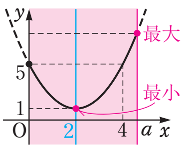
最大値　$5\ (x=0)$
最小値　$1\ (x=2)$

(iii)　$a=4$



最大値　$5\ (x=0,\ 4)$
最小値　$1\ (x=2)$

(iv)　$a>4$



最大値　a^2-4a+5
$(x=a)$
最小値　$1\ (x=2)$

(iii)の　$a=4$　の場合は，(ii)や(iv)に含んで考える場合もあるが，ここでは定義域の両端で最大値をとる場合なので，分けて考えている．

練習 41 ＊＊＊

(1)　$a>1$　とする．関数　$y=-x^2+4x+2\ (1 \leqq x \leqq a)$　について，次の問いに答えよ．

(ア)　最小値を求めよ．　　　(イ)　最大値を求めよ．

(2)　$a>0$　とする．関数　$y=x^2-2x+3\ (0 \leqq x \leqq a)$　について，最大値および最小値を求めよ．

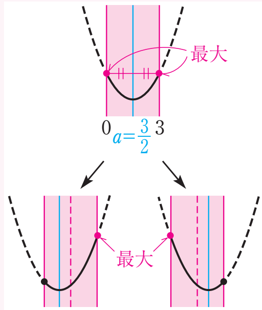
Check

例題 42　軸が動くときの最大・最小　＊＊＊＊

関数 $y=x^2-2ax+4$ $(0\leqq x\leqq 3)$ について，次の問いに答えよ．

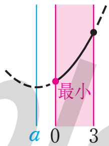
(1)　最小値を求めよ．　　　　(2)　最大値を求めよ．

考え方　グラフをかいて考える．ここでは下に凸のグラフになっている．
定義域と軸の位置関係で場合分けをする．
(1)　最小値は，軸が定義域内にあるときは頂点で，定義域の外にあるときは右端か左端でとる．
(2)　最大値は，定義域の左端か右端でとるが，ここでも定義域の中央に軸があるときに着目する．
つまり，軸 $x=a$ が，定義域 $0\leqq x\leqq 3$ の中央 $x=\dfrac{3}{2}$ と一致する $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，右上の図のように左端と右端の値が等しくなっている．

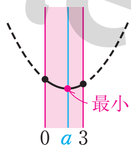


解答　$y=x^2-2ax+4=(x-a)^2-a^2+4$
グラフは下に凸で，軸は直線 $x=a$

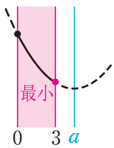
(1)　(i)　$a<0$ のとき
グラフは右の図のようになり，
軸は定義域より左側にある．
$x=0$ のとき最小となり，
最小値 4



(ii)　$0\leqq a\leqq 3$ のとき
グラフは右の図のようになり，
軸は定義域内にある．
$x=a$ のとき最小となり，
最小値 $-a^2+4$



(iii)　$a>3$ のとき
グラフは右の図のようになり，
軸は定義域より右側にある．
$x=3$ のとき最小となり，
最小値 $-6a+13$

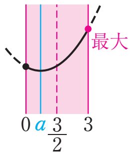


よって，(i)〜(iii)より，

$$\begin{cases} a<0 \text{ のとき，} & \text{最小値 } 4\ (x=0) \\ 0\leqq a\leqq 3 \text{ のとき，} & \text{最小値 } -a^2+4\ (x=a) \\ a>3 \text{ のとき，} & \text{最小値 } -6a+13\ (x=3) \end{cases}$$

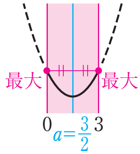
◀ 軸の位置で場合分け．
軸が定義域内にあれば，下に凸より頂点で最小．軸が定義域からはずれる場合，左端か右端で最小．
つまり，全部で３通りの場合分けとなる．
等号は境目のどちらにつけておいてもよい．

(2)　(i)　$a<\dfrac{3}{2}$ のとき



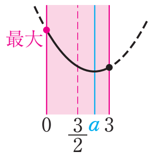
グラフは右の図のようになる．
$x=3$ のとき最大となり，
最大値　$-6a+13$

(ii)　$a=\dfrac{3}{2}$ のとき



グラフは右の図のようになる．
$x=0,\ 3$ のとき最大となり，
最大値　4

(iii)　$a>\dfrac{3}{2}$ のとき



グラフは右の図のようになる．
$x=0$ のとき最大となり，
最大値　4

よって，(i)〜(iii)より，

$$\begin{cases} a<\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } -6a+13\ (x=3) \\ a=\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } 4\ (x=0,\ 3) \\ a>\dfrac{3}{2} \text{ のとき，最大値 } 4\ (x=0) \end{cases}$$

◀軸が定義域の中央より左にあるか右にあるかで場合分けする．

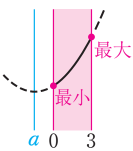
◀$x=0$ と $x=3$ では $x=3$ の方が軸から遠い．

Focus

最大・最小は定義域と軸の位置関係，グラフの対称性に注目

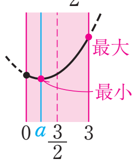
注》　例題 42 において，最大値と最小値をまとめると次のようになる．

(i)　$a<0$



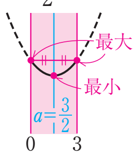
最大値　$-6a+13$
$(x=3)$
最小値　$4(x=0)$

(ii)　$0\leqq a<\dfrac{3}{2}$



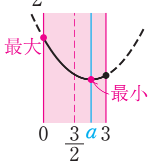
最大値　$-6a+13$
$(x=3)$
最小値　$-a^2+4$
$(x=a)$

(iii)　$a=\dfrac{3}{2}$



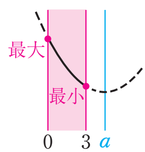
最大値　4
$(x=0,\ 3)$
最小値　$\dfrac{7}{4}$
$\left(x=\dfrac{3}{2}\right)$

(iv)　$\dfrac{3}{2}<a\leqq 3$



最大値　4
$(x=0)$
最小値　$-a^2+4$
$(x=a)$

(v)　$a>3$



最大値　4
$(x=0)$
最小値　$-6a+13$
$(x=3)$

練習 42 ★★★

(1)　関数 $y=-x^2+4ax+4$ $(0\leqq x\leqq 4)$ について，次の問いに答えよ．
　(ア)　最大値を求めよ．　　(イ)　最小値を求めよ．

(2)　関数 $y=x^2+2ax-3$ $(0\leqq x\leqq 2)$ について，最大値および最小値を求めよ．

➡ $p.109$ 8

Check

例題 81 条件つき２変数関数(1) ＊＊＊＊＊

思考の礎

実数 x, y の間に $3x+y=6$ という関係があるとき，次の問いに答えよ．

(1) $z=x^2+y^2$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．

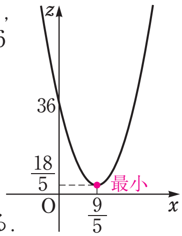
(2) $x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき，x^2+y^2 のとりうる値の範囲を求めよ．

考え方 z は $(x,\ y)$ の値によって定まる．このような関数を２変数関数という．たとえば，$3x+y=6$ を満たす $(x,\ y)=(1,\ 3)$ に対しては，$z=1^2+3^2=10$ が定まる．
しかし，x が定まれば $y=-3x+6$ より，y も定まるので，$z=x^2+(-3x+6)^2$ と，1 変数関数に帰着できる． LOOK 思考の礎

解答 (1) $y=-3x+6$ を z の式に代入すると，

$$z=x^2+(-3x+6)^2=10x^2-36x+36$$
$$=10\left(x^2-\frac{18}{5}x\right)+36$$
$$=10\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{18}{5}$$

グラフは右の図のようになり，



z は $x=\frac{9}{5}$ のとき，最小値 $\frac{18}{5}$ をとる．

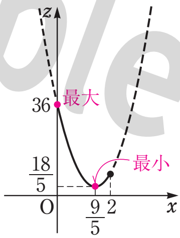
◀ y を消去することで，z は x についての２次関数になる．

$x=\frac{9}{5}$ のとき，$y=-3\times\frac{9}{5}+6=\frac{3}{5}$

◀ $y=-3x+6$ に代入

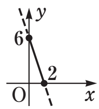
よって，z の**最小値** $\frac{18}{5}$ $\left(x=\frac{9}{5},\ y=\frac{3}{5}\ \text{のとき}\right)$

(2) $y\geqq0$，$y=-3x+6$ より，
$-3x+6\geqq0$ だから， $x\leqq2$
これと $x\geqq0$ より，
$0\leqq x\leqq2$
$0\leqq x\leqq2$ の範囲で
$z=10x^2-36x+36$ のグラフをかくと右の図のようになる．



よって， $\frac{18}{5}\leqq x^2+y^2\leqq36$

◀ $3x+y=6$ $(x\geqq0,\ y\geqq0)$ のグラフから，$0\leqq x\leqq2$ としてもよい．



◀ $z=x^2+y^2$ より，z のとりうる値の範囲を求める．

Focus

２変数関数も，文字が消去できれば１変数関数
⟹ 消去された文字の条件に注意せよ

注》「y を x で表す」ことと同様に「条件も x で表す」ことを忘れずに．
例題 81 (2)では条件 $y\geqq0$ を x の式で表して $x\leqq2$ を出すことが重要．

練習 81 ＊＊ 実数 x，y の間に $x+y=3$ という関係があるとき，$z=x^2+2y^2$ の最小値と，そのときの x，y の値を求めよ．さらに，$x\geqq0$，$y\geqq0$ のとき，x^2+2y^2 のとりうる値の範囲を求めよ． （桜美林大・改）

➡ $p.171$ 22

例題 81 思考の礎 「文字でおくとは？」

前ページの例題 81 (1)の解答では，y を消去することで，z を x についての 2 次関数として答えを求めていったが，何をやっているのかきちんと理解できているだろうか．

『実数 x，y の間に $3x+y=6$ という関係があるとき，$z=x^2+y^2$ の最小値を求めよ．』という問題を考えるとき，

たとえば，$3x+y=6$ という関係がある実数 x，y を具体的に考えると

$(x,\ y)=(0,\ 6)$，$(1,\ 3)$，$(2,\ 0)$，$(\sqrt{2},\ 6-3\sqrt{2})$ などがある．

これらの値をもとに z を計算すると，

$(x,\ y)=(0,\ 6)$ のとき　$z=0^2+6^2=36$

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ のとき　$z=1^2+3^2=10$

$(x,\ y)=(2,\ 0)$ のとき　$z=2^2+0^2=4$

$(x,\ y)=(\sqrt{2},\ 6-3\sqrt{2})$ のとき　$z=(\sqrt{2})^2+(6-3\sqrt{2})^2=56-36\sqrt{2}$

これら 4 つの z に限れば最小値は 4 だが，すべての $(x,\ y)$ の組について考えたわけではないので，本当に最小値が 4 かどうかは非常に怪しい．

そこで，一般化するために文字を使って考える．

$3x+y=6$ を満たす x の値を a とするとき，$y=6-3a$ であるから，

$z=a^2+(6-3a)^2=10a^2-36a+36$　となる．

ここで，$3x+y=6$ を満たす x の値 a がとり得る範囲はすべての実数なので，この等式を a についての 2 次関数とみれば，

$$z=10a^2-36a+36=10\left(a-\frac{9}{5}\right)^2+\frac{18}{5},$$

したがって，$a=\dfrac{9}{5}$ のとき，z は最小値 $\dfrac{18}{5}$ をとる．

ここで，$a=\dfrac{9}{5}$ というのは，$x=\dfrac{9}{5}$ のときであるから，

最終的な答えは「$x=\dfrac{9}{5}$ のとき，最小値 $\dfrac{18}{5}$」となる．

ここでは，具体的な文字 a を用いて一般化することを考えたが，最後の最後で a を x におき換えるくらいなら，例題 81 (1)のように，最初から x を用いて問題を解いてもよい．

このような背景から，例題の解答が始まっていることを理解してほしい．

章末問題

▶▶解答編 p.125

***
1
← p.163 p.164

(1)　関数 $y=||x-1|-1|-1$ のグラフをかけ.

(2)　関数 $y=|x+4|-|x+1|$ について，次の問いに答えよ.

(ア)　この関数の最大値と最小値を求めよ.

(イ)　この関数のグラフと直線 $y=x+k$ が3個の共有点をもつための k の値の範囲を求めよ.　（東京薬科大・改）

***
2
← p.82 p.88 p.104

2次関数 $y=ax^2+bx+c$ ……①

のグラフが，点 $(2,\ 2)$ を頂点とし原点Oを通る放物線であるとき，次の問いに答えよ.

(1)　定数 a, b, c の値をそれぞれ求めよ.

(2)　関数①のグラフを x 軸方向に -3, y 軸方向に6平行移動した放物線と x 軸との交点を求めよ.

(3)　$r>0$ とし，$-r \leqq x \leqq 2r$ における関数①の最大値を $M(r)$，最小値を $m(r)$ とするとき，$M(r)+m(r)=0$ となる r を求めよ.

（東北学院大）

***
3
← p.92 p.128 p.153

p, q, m を実数とする．放物線 $y=-x^2+2px+q$ を C とし，その頂点は直線 $y=mx-3$ 上にあるとする．このとき，次の問いに答えよ.

(1)　q を p, m を用いて表せ.

(2)　C の頂点の x 座標が -4 のとき，C が x 軸と異なる2点で交わるように，m の値の範囲を定めよ．また，そのとき C が x 軸から切りとる線分の長さを m を用いて表せ.

(3)　p の値にかかわらず，C と y 軸の共有点の y 座標が負となるように，m の値の範囲を定めよ.　（山口大）

**
4
← p.118

(1)　k を定数とする．方程式 $kx^2-4x+k+3=0$ がただ1つの実数解をもつような k の値を求めよ.　（京都産業大）

(2)　a, b は自然数で，2次方程式 $x^2+2ax+6a-3b=0$ が重解 α をもつとき，a, b, α の値を求めよ.　（成蹊大）

****
5
← $p.84$ $p.150$

放物線 $y=f(x)$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したところ，放物線 $y=x^2+2(2-a)x+2(1-2a)$ が得られた．ただし，a は定数である．

(1)　$f(x)$ を求めよ．

(2)　方程式 $f(x)=0$ が，$1 \leqq x \leqq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような a の値の範囲を求めよ．（千葉大）

****
6
← $p.166$

x の関数 $f(x)=|x^2-4x+3|$，$g(x)=x+a$（a は定数）について，

(1)　$y=f(x)$ のグラフと $a=1$ の場合の $y=g(x)$ のグラフを 1 つの座標平面にかけ．

(2)　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの交点の個数を求めよ．（専修大）

思考力問題

***
7

整数 m に対して，$f(x)=x^2-mx+\dfrac{m}{4}-1$ とおく．

(1)　方程式 $f(x)=0$ が整数の解を少なくとも 1 つもつような m の値を求めよ．

(2)　不等式 $f(x) \leqq 0$ を満たす整数がちょうど 4 個あるような m の値を求めよ．（08 秋田大）

***
8

次の問いに答えよ．

(1)　x，y についての連立方程式

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=9 \\ x^2+y^2=k \end{cases}$$

が実数解をもつための定数 k の条件を求めよ．ただし，k は実数とする．（香川大）

(2)　直角三角形の 3 辺の長さの和が 1 であるとき，斜辺の長さのとり得る値の範囲を求めよ．

チャレンジ編

チャレンジ編の構成と使い方

チャレンジ編は「Level up 問題」，「解説 Level up 問題」で構成されています。

Level up 問題

チャレンジ編では，最近の入試問題や過去の良問を中心に，「絶対に取り組んでもらいたい 30 題」で構成しています。『マスター編』の学習を終えたあと，**入試へ向けた演習や，数学的思考を養う演習**を行う際にお使いください。

解説 Level up 問題

Level up 問題に掲載している問題は全て，「解説 Level up 問題」として本編で解説をしています。解説の中では，解法やポイントの確認とともに，「One Point Lesson」として，別視点のアプローチなどが確認できます。
入試問題が解けたかどうかにとどまらず，入試に対応するための様々な学力を養ってください。

参照例題をもとにマスター編で復習

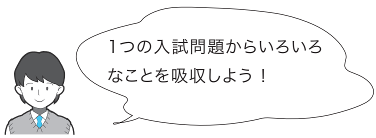
わからなかった場合 ↑　↓ マスター編を理解できたら

自分の力で，「Level up 問題」にチャレンジしてみる。

↓

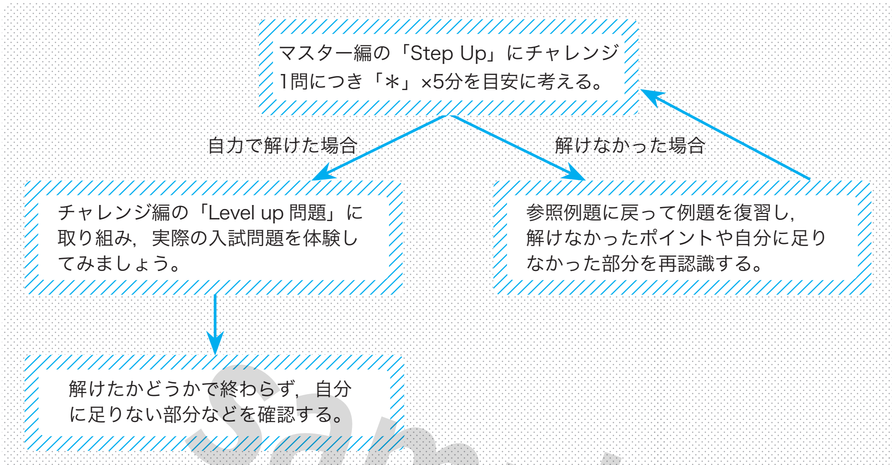
「解説 Level up 問題」や「One Point Lesson」で解法やポイントを確認

チャレンジ編での学習も，これまでのマスター編の学習と同じです。まずは自分で考えてみるところから始めましょう。そして，わからない場合は，関連するマスター編の例題に戻って，内容を確認しましょう。



受験対策としての使い方

基本・標準レベルが身についていて，マスター編の各章の「Step Up」にも取り組んだあとは，チャレンジ編に取り組みましょう。



チャレンジ編は，骨のある問題が多いので，自分の力で解くのは難しいかもしれません。しかし，それらの問題に対しても，最低15分～20分は考え，**わかるところまででもいいので，まずは自分の力で解答を作ってみましょう。**この練習が，実際の入試でもとても役立ちます。15分考えて，それでもわからなかった場合は，その問題に書いている参照例題に戻って基本を確認する，そして再度，何か解答が書けないか考えてみましょう。

そこまでやっても解けなかった場合は，解答をみてみましょう。ここでもただ漠然と解答を読むのではなく，「考え方」をしっかり読んで，自分に何が足りなかったのかをはっきりさせましょう。

そして，解答の1行1行の流れを意識しながら読みます。理解ができたら，できるだけ解答を見ないで，読んで理解している記憶を手がかりにして自分で解答を作ってみましょう。わからなくなったら，その度に少し解答を見て確認する。このときも最後は模範解答を見て，どこが足りなかったかということを自覚する。この一連の作業を繰り返してみましょう。

●受験対策の学習をする上でのポイント

【1】自分の頭で考える

まずは15分。自分の頭で考えてみましょう。

【2】とにかく自分の言葉で解答を作る

自分の言葉で解答を作ると，どこまで理解できていて，何が自分に足りないかがわかります。

【3】思考の体系を作る

わからないときは，関連する問題をみて，自分が理解してきたことが何かを意識しましょう。

Level up 問題

□の問題の解答は，別冊解答編 $p.472$ ～に掲載しています．

第１章　「数と式」

1
← $p.62$ $p.67$

a を整数とする．不等式

$$2|x-a|<x+1$$

を満たす整数 x が３個あるとき，a の値を求めよ．　(10　大阪経済大)

第２章　「２次関数」

2
← $p.106$ $p.157$

曲線 $y=x^2$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ 上の相異なる３点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$-2\leqq a<b<c\leqq 1$ であるものとする．

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を a，b，c を用いて表せ．

(2)　a，b，c を上述した条件の下で動かすとき，S の最大値を求めよ．

(東北大)

3
← $p.105$ $p.148$ $p.149$

x，y を実数とし，

$$F=x^4-4x^2y+y^2+3y$$

とする．

(1)　すべての y に対して $F\geqq 0$ となるような x の値の範囲を求めよ．

(2)　すべての x に対して $F\geqq 0$ となるような y の値の範囲を求めよ．

(東京大・改)

4
← $p.149$

a を正の実数とする．関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の２つの条件

(A)　$-3\leqq x<0$ のとき　$f(x)\geqq -1$

(B)　$x\geqq 0$ のとき　$f(x)\geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ．　(05　神戸大)

5 ← $p.132$ $p.164$

定数 a は実数であるとする．関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか．a の値によって分類せよ．（08　京都大）

6 ← $p.104$ $p.160$

a は実数とし，b は正の定数とする．x の関数 $f(x)=x^2+2(ax+b|x|)$ の最小値 m を求めよ．さらに，a の値が変化するとき，a の値を横軸に，m の値を縦軸にとって m のグラフをかけ．（19　京都大）

第 3 章　「集合と命題」

7 ← $p.192$

次の命題の真偽を調べ，真であるときは証明を与え，偽であるときは反例をあげよ．

(1)　2 つの不等式 $x+y\leqq 3$ と $(x-1)y\geqq 1$ を満たす自然数の組 $(x,\ y)$ はただ 1 つだけ存在する．

(2)　$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b}$ を満たす正の実数は存在しない．（15　鳥取環境大）

8 ← $p.203$

次の問いに答えよ．ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは証明なしに利用してもよい．

(1)　有理数 p，q，r について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ．

(2)　実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ．（京都大）

解説 Level up 問題

第1章　数と式

1 a を整数とする．不等式

$$2|x-a|<x+1$$

を満たす整数 x が3個あるとき，a の値を求めよ．（10　大阪経済大）

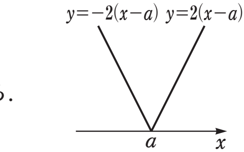
<考え方>

x が題意を満たすのはどのようなときなのかを，グラフをかいて考える．
また，不等式に等号が含まれていないことに注意する．

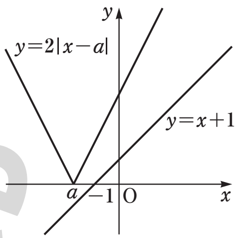
解

$$\begin{cases} 2|x-a|=2(x-a) & (x \geqq a) \\ 2|x-a|=-2(x-a) & (x<a) \end{cases}$$

より，関数 $y=2|x-a|$ のグラフは右の図のようになる．



ここで，$a \leqq -1$ のときは，グラフは右の図のようになり，すべての実数 x に対して，$2|x-a| \geqq x+1$ が成り立つので，題意を満たさない．

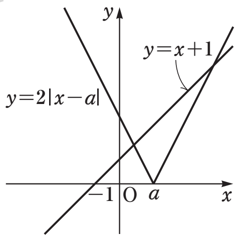


よって，$a>-1$ である．

このとき，グラフは右下の図のようになり，関数 $y=2|x-a|$ と関数 $y=x+1$ のグラフの交点の x 座標は，

$$-2(x-a)=x+1 \text{ と}$$
$$2(x-a)=x+1$$

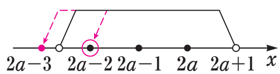
をそれぞれ解いて，$\dfrac{2a-1}{3}$ と $2a+1$ となる．



よって，$\dfrac{2a-1}{3}<x<2a+1$ のとき，不等式 $2|x-a|<x+1$ が成り立つ．

そこで，$\dfrac{2a-1}{3}<x<2a+1$ を満たす整数 x が3個となるときを考える．

このとき，整数 x は $x=2a$，$2a-1$，$2a-2$ となり，また，



$$2a-3 \leqq \frac{2a-1}{3}<2a-2 \quad \cdots\cdots ①$$

が成立する．

◀等号の有無に注意

a についての連立不等式①を解いて，

$$\frac{5}{4}<a \leqq 2$$

これを満たす整数 a は，　$a=2$

また，これは $a>-1$ を満たす．

◀吟味も忘れないこと

よって，　$\boldsymbol{a=2}$

One Point Lesson

絶対値を含む不等式においては，次の公式が成り立つ．

$$|A|<B \iff -B<A<B \quad \cdots\cdots①$$
$$|A|>B \iff A<-B,\ B<A \quad \cdots\cdots②$$

（証明）
A と $-A$ のうち，大きい方を $\mathrm{Max}(A,\ -A)$ とおくと，$|A|=\mathrm{Max}(A,\ -A)$ である．

① $|A|<B$ は，すなわち $\mathrm{Max}(A,\ -A)<B$ である．
したがって，これは $A<B$ かつ $-A<B$ となるので，
$-B<A<B$ が成り立つ．

② $|A|>B$ は，すなわち $\mathrm{Max}(A,\ -A)>B$ である．
したがって，これは $A>B$ または $-A>B$ となるので，
$A<-B,\ B<A$ が成り立つ．

（証明終わり）

これを利用すると，絶対値を含む不等式を場合分けせずに考えることができる．
例えば，問題4では，以下のように考えることができる．

不等式 $2|x-a|<x+1$ は，
$$-(x+1)<2(x-a)<x+1$$
とできる．
ここで，$-(x+1)<2(x-a)$ より，
$$x>\frac{2a-1}{3} \quad \cdots\cdots③$$
また，$2(x-a)<x+1$ より，
$$x<2a+1 \quad \cdots\cdots④$$
よって，③，④の共通部分を求めて，
$$\frac{2a-1}{3}<x<2a+1$$
となる．（以下同様）

変数 x が右辺に含まれているので，
「$2|x-a|<x+1 \iff -(x+1)<2(x-a)<x+1$」 $\cdots\cdots(*)$
と変形することにためらうかもしれない．しかし，$(*)$ は，
「定めた x の各値に対して『$2|x-a|<x+1 \iff -(x+1)<2(x-a)<x+1$』」
ということであり，記号「$\iff$」の左右において x の値は変わらない．
よって，このとき，不等式 $2|x-a|<x+1$ と，不等式 $-(x+1)<2(x-a)<x+1$ における x の値は同じであり，また，$2|x-a|=|2x-2a|$，$2(x-a)=2x-2a$ であることから，$A=2x-2a$，$B=x+1$ とおくことで，①から $(*)$ が導かれる．

なお，この公式①，②は，A や B の正負や文字式かどうかにかかわらず成り立ち，そこがこの同値式のよいところである．

第２章 ２次関数

2 曲線 $y=x^2$ $(-2\leqq x\leqq 1)$ 上の相異なる３点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする．このとき，次の問いに答えよ．ただし，$-2\leqq a<b<c\leqq 1$ であるものとする．

(1) △ABC の面積 S を a，b，c を用いて表せ．

(2) a，b，c を上述した条件の下で動かすとき，S の最大値を求めよ．

（東北大）

<(1)の考え方>

点 B を通り y 軸に平行な直線と直線 AC との交点を D とし，△ABC を△ABD と△BCD に分割して考える．

(1)の**解** ３点 A，B，C は相異なる点で，その左右の位置関係も判明している．

直線 AC の方程式は，

$$y=(c+a)x-ac \quad \cdots\cdots①$$

◀ ２点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ を通る直線

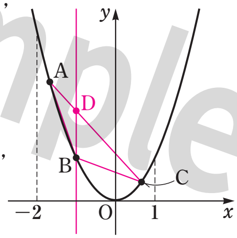
$$\begin{aligned} y&=\frac{c^2-a^2}{c-a}(x-a)+a^2\\ &=\frac{(c+a)(c-a)}{c-a}(x-a)+a^2\\ &=(c+a)(x-a)+a^2\\ &=(c+a)x-ac-a^2+a^2\\ &=(c+a)x-ac \end{aligned}$$

ここで，点 B を通り y 軸に平行な直線と，直線 AC との交点を D とすると，D の x 座標は b となる．

また，①に $x=b$ を代入すると，

$$\begin{aligned} y&=(c+a)b-ac\\ &=ab+bc-ac \end{aligned}$$

より，D の y 座標は $ab+bc-ac$ である．



したがって，線分 BD の長さは，

$$\begin{aligned} \mathrm{BD}&=(ab+bc-ac)-b^2\\ &=(b-c)a-(b-c)b\\ &=(a-b)(b-c) \end{aligned}$$

となる．

よって，△ABC の面積 S は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S}&=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}\\ &=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(b-a)+\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-b)\\ &=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)\{(b-a)+(c-b)\}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

◀ 必ず面積分割すること

<(2)考え方>
$-2 \leqq a < b < c \leqq 1$ の条件より，1文字を固定（本問では b）に考える．

(2)の 解

a，b，c についての条件 $-2 \leqq a < b < c \leqq 1$ について考える．

(i)　$-2 \leqq a < b$ より，　$-b < -a \leqq 2$　すなわち，　$0 < b-a \leqq b+2$

(ii)　$b < c \leqq 1$ より，　$0 < c-b \leqq 1-b$

(iii)　$a < c \leqq 1$ より，　$0 < c-a \leqq 1-a$

また，$-2 \leqq a$ より，　$-a \leqq 2$

したがって，　$0 < c-a \leqq 1-a \leqq 1+2=3$

すなわち，　$0 < c-a \leqq 3$

(i)，(ii)，(iii)より，

$$S=\frac{1}{2}(a-b)(b-c)(c-a)=\frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a) \leqq \frac{1}{2}(b+2)(1-b)\cdot 3$$

であり，等号が成立するときに S は最大となる．

このとき，$b-a=b+2$，$c-b=1-b$，$c-a=3$ より，
$a=-2$，$c=1$ のとき S は最大となる．

$a=-2$，$c=1$ を $\frac{1}{2}(b-a)(c-b)(c-a)$ に代入して，$\frac{3}{2}(b+2)(1-b)$

このとき，$f(b)=\frac{3}{2}(b+2)(1-b)$ とおくと，

$$f(b)=-\frac{3}{2}b^2-\frac{3}{2}b+3=-\frac{3}{2}\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{8}$$

より，$b=-\frac{1}{2}$ のとき，最大値 $\frac{27}{8}$ をとる．

よって，S は $a=-2$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=1$ のとき最大値 $\frac{27}{8}$ をとる．

One Point Lesson

(2)で S の最大値を考えるが，(1)より S が a，b，c の3変数となっている．
多変数関数は1文字ずつ動かして考えるのが基本であるが，本問は $-2 \leqq a < b < c \leqq 1$ という条件を用いて，1文字を固定して考えることになる．
実際，上の解答では b を固定して，$b-a$，$c-b$，$c-a$ の取りうる値の範囲を求めている．

$-2 \leqq a < b$ から $0 < b-a \leqq b+2$

$b < c \leqq 1$ から $0 < c-b \leqq 1-b$

$-2 \leqq a < c \leqq 1$ から $0 < c-a \leqq 3$

であることから，

$$S \leqq \frac{1}{2}\cdot(b+2)(1-b)\cdot 3$$

として，等号が成り立つことから S の最大値を b で表すことができる．
そして，次に b を変数と見て平方完成することで，最大値を求めている．