17 2次不等式の応用

B

198. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} x+1\leqq 4x-8 \\ x^2<4x+5 \end{cases}$

*(2) $\begin{cases} x^2-2x-80<0 \\ x^2-6x-16>0 \end{cases}$

*(3) $-6x-2<x^2+3\leqq 2(x^2+x)$

(4) $\begin{cases} -x^2+x+2<0 \\ x^2-2x-11\leqq 0 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} x^2-2\leqq 0 \\ x^2-2x-1>0 \end{cases}$

(6) $\begin{cases} x^2-x-1>0 \\ x^2+x-1<0 \end{cases}$

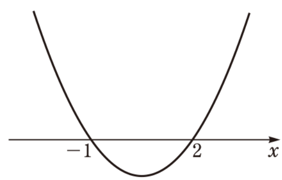
▶ 教 p.91 例題 16

例題 24 2 次不等式と解

2 次不等式 $ax^2-2x+b<0$ の解が $-1<x<2$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

考え方 $\alpha<\beta$ のとき，　$(x-\alpha)(x-\beta)>0$ の解は，　$x<\alpha$，$\beta<x$
$(x-\alpha)(x-\beta)<0$ の解は，　$\alpha<x<\beta$

解 $-1<x<2$ が解である 2 次不等式の 1 つは，
$(x+1)(x-2)<0$，　$x^2-x-2<0$
x の係数に着目して，両辺に 2 を掛けると，
$2x^2-2x-4<0$
よって，対応する項の係数を比較して，
$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-4}$



別解 2 次関数 $y=ax^2-2x+b$ $(a\neq 0)$ のグラフが $-1<x<2$ の範囲で x 軸より下側にある。すなわち，グラフは下に凸の放物線で，$a>0$ であり，2 点 $(-1,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから，
$a+2+b=0$ ……①，$4a-4+b=0$ ……②
①，②を解くと，　$a=2$，$b=-4$
これは $a>0$ を満たす。
よって，　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=-4}$

199. 次の条件を満たす定数 a，b，c，d の値を求めよ。

*(1) 2 次不等式 $6x^2+ax+b>0$ の解が $x<-\dfrac{1}{3}$，$1<x$ である。

(2) 2 次不等式 $cx^2+6x+d>0$ の解が $-1<x<3$ である。

→ 例題 24

例題 25　文字の入った 2 次不等式

a を定数とするとき，不等式 $x(x-a)\leqq 0$ の解を，a の値の範囲によって場合分けをして求めよ。

考え方　$x(x-a)$ は，$x=0$ と $x=a$ で符号が変わるから，a と 0 の大小により場合分けをする。

解　(i)　$\boldsymbol{a<0}$ **のとき，**

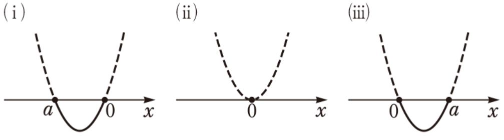
$\boldsymbol{a\leqq x\leqq 0}$

(ii)　$\boldsymbol{a=0}$ **のとき，**

$\boldsymbol{x=0}$

(iii)　$\boldsymbol{a>0}$ **のとき，**

$\boldsymbol{0\leqq x\leqq a}$



200. a を定数とするとき，次の不等式の解を，a の値の範囲によって場合分けをして求めよ。

(1)　$(x-a)(x-2)<0$　　*(2)　$x^2+ax-2(a+2)>0$　→ 例題 25

201. 次の条件を満たす定数 m の値の範囲を定めよ。

*(1)　$x^2+mx+m=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ。

(2)　$x^2+(m+2)x+m+4=0$ が実数解をもたない。

202. a を定数とするとき，次の方程式の実数解の個数を求めよ。

(1)　$x^2-4ax+11a-6=0$　　*(2)　$(a+2)x^2-4x+a=0$

203. 2 つの放物線 $y=x^2+(a-1)x+1$，$y=x^2+x+a$ について，次の問いに答えよ。

(1)　ともに x 軸と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

*(2)　どちらか一方だけが x 軸と共有点をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

***204**. 連立不等式 $x^2+2x-4>0$，$x^2-(a+1)x+a\leqq 0$ を満たす整数が，ただ 1 つであるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

205. 次の 2 次不等式の解がすべての実数となるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

(1)　$x^2-kx-k>0$　　(2)　$-x^2-kx+k-8<0$

▶ 教 p.91 応用例題 17

***206**. 2 次不等式 $(m+1)x^2-(m+1)x+m>0$ がつねに成り立つとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

例題 26 x 軸との位置関係

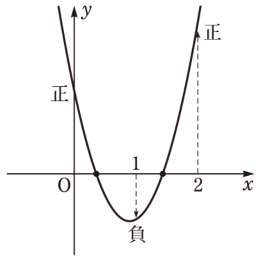
2次関数 $y=2x^2-kx+1$ のグラフが x 軸と，0と1の間，1と2の間で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

考え方 $x=0,\ 1,\ 2$ のときの y の値の符号を調べればよい。

解 $f(x)=2x^2-kx+1$ とおく。
2次関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図のようになればよいから，

$$\begin{cases} f(0)=1>0 & \text{これはつねに成り立つ。} \\ f(1)=2-k+1=3-k<0 \text{ より,} & k>3 \quad \cdots ① \\ f(2)=8-2k+1=9-2k>0 \text{ より,} & k<\dfrac{9}{2} \quad \cdots ② \end{cases}$$

①，②より， $\mathbf{3<k<\dfrac{9}{2}}$



*$\mathbf{207}$. 2次関数 $y=x^2+2kx-k$ のグラフが x 軸と，-2 と0の間，0と2の間で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。 → 例題 26

例題 27 x 軸との位置関係

2次関数 $y=x^2-x+k$ のグラフが x 軸の $0<x<2$ の部分において異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

考え方 判別式(頂点の y 座標)，軸，区間の両端の値に注目する。

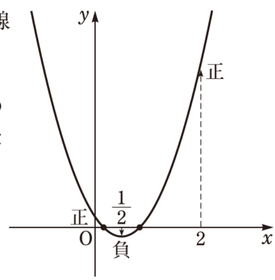
解 $f(x)=x^2-x+k$ とおくと，

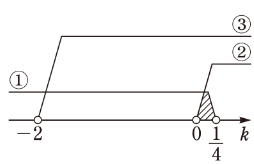
$$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+k-\frac{1}{4}$$

2次関数 $y=f(x)$ のグラフは下に凸で，軸は直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。
軸が $0<x<2$ の範囲にあるから，グラフが x 軸の $0<x<2$ の部分において，異なる2点と交わるための条件は，

$$\begin{cases} x^2-x+k=0 \text{ の判別式を } D \text{ とすると,} \\ D=1-4k>0 \text{ より,} \quad k<\dfrac{1}{4} \quad \cdots\cdots ① \\ f(0)=k>0 \quad \cdots\cdots ② \\ f(2)=2+k>0 \text{ より,} \quad k>-2 \quad \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①〜③より， $\mathbf{0<k<\dfrac{1}{4}}$





*208. 2次関数 $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+k-1$ のグラフが x 軸の $0<x<\frac{3}{2}$ の部分において異なる2点で交わるとき，定数 k の値の範囲を求めよ。

→ 例題 27

209. 2次方程式 $x^2+2px+p+12=0$ が次の条件を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

(1) 異なる2つの正の解をもつ。
*(2) 異なる2つの負の解をもつ。
(3) 異なる2つの2より大きい解をもつ。
*(4) 異符号の解をもつ。

▶ 教 p.92 応用例題18，教 p.93 応用例題19

210. 次の条件を満たすとき，定数 m の値の範囲を求めよ。

*(1) 2次方程式 $2x^2-2mx+3m-4=0$ の異なる2つの実数解がともに $0<x<2$ を満たす。

(2) 2次方程式 $mx^2+mx+1=0$ の異なる2つの実数解のうち，1つだけが $1<x<2$ を満たす。

211. 2次方程式 $2x^2-ax+1=0$ の2つの解 α，β が $0<\alpha<1<\beta<2$ を満たすとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

212. 長さ 20 cm の線分 AB を点Cで2つの部分に分け，AC，BC をそれぞれ1辺とする正方形を作るとき，その面積の和が 250 cm² より小さくなるようにしたい。点Cを点Aから何 cm のところにとればよいか。

▶ 教 p.93 応用例題20

213. 次の関数のグラフをかけ。

*(1) $y=|x-2|$
(2) $y=|x^2-2x-3|$

▶ 教 p.95 例，例題

チェック & トライ

214. 2次関数 $y=x^2-3x+5$ のグラフについて，次の問いに答えよ。

(1) 軸と頂点をいえ。　　(2) グラフをかけ。

(3) このグラフを x 軸方向に -2，y 軸方向に3だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(4) このグラフを原点に関して対称に移動した放物線の方程式を求めよ。

215. 次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ。

(1) 3点 $(-1,\ 4)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 14)$ を通る放物線

(2) 軸が直線 $x=-2$ で，2点 $(0,\ -3)$，$(-1,\ 0)$ を通る放物線

(3) 3点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 3)$ を通る放物線

216. 次の条件を満たす放物線の方程式を求めよ。

(1) 2点 $(1,\ -1)$，$(3,\ -1)$ を通り，頂点が直線 $y=x$ 上にある放物線

(2) 放物線 $y=4x^2-3$ を直線 $y=2x$ に平行な方向に平行移動したもので，軸が直線 $x=1$ である放物線

217. 次の関数の最大値と最小値を求めよ。

(1) $y=x^2-4x-5\quad(0\leqq x\leqq 3)$　　(2) $y=-2x^2-2x+1\quad(0\leqq x\leqq 1)$

218. 2次関数 $y=x^2-x+2\ (0\leqq x\leqq a)$ の最大値，最小値，およびそのときの x の値を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

219. a を定数とするとき，関数 $y=x^2+2ax+a\ (0\leqq x\leqq 2)$ の最大値，最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

220. t を定数とするとき，関数 $y=-x^2+4x$ の，定義域 $t\leqq x\leqq t+1$ における最小値とそのときの x の値を求めよ。

221. 2次関数 $y=ax^2+2a^2x+b$ が $x=-1$ で最小値5をとるとき，定数 a，b の値を求めよ。

222. 次の2次関数のグラフと x 軸との共有点の個数を求めよ。

(1) $y=3x^2+4x-15$　　(2) $y=x^2+x+\dfrac{1}{4}$　　(3) $y=-2x^2+3x-2$

223. 2次関数 $y=kx^2+2kx+1$ のグラフが x 軸と接するとき，定数 k の値と接点の x 座標を求めよ。

発展 **224**. m を定数とするとき，放物線 $y=x^2-2x$ と直線 $y=mx-4$ の共有点の個数を求めよ。また，接するときは，接点の座標を求めよ。

225. 次の2次不等式を解け。　　2次不等式のランダム演習

(1) $x^2-7x-8>0$　(2) $2x^2-x-2<0$　(3) $x^2+12x+36>0$

(4) $2x^2+3x+6<0$　(5) $2x^2+3x-2\geqq 0$　(6) $x^2-4x+4\leqq 0$

(7) $8x^2-7x-1\leqq 0$　(8) $9x^2+6x+1\geqq 0$　(9) $x^2-4x+8\leqq 0$

(10) $x^2-4x+16>0$　(11) $-x^2+4x>0$　(12) $-x^2-4x-4>0$

226. 次の連立不等式を解け。

(1) $\begin{cases} 2(x-1)\leqq 7x+8 \\ x^2-3x>4 \end{cases}$　(2) $4x-3<x^2\leqq 4x+2$

227. 2次関数 $y=kx^2-4kx+k-3$ のグラフがつねに x 軸の下側にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。

228. 不等式 $mx^2+4x+m-3>0$ がつねに成り立つように，定数 m の値の範囲を定めよ。

229. 2次関数 $f(x)=x^2+ax+3-a$ について，次の問いに答えよ。

(1) すべての x について，$f(x)\geqq 0$ であるための定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) $-2\leqq x\leqq 2$ であるすべての x について，$f(x)\geqq 0$ であるための定数 a の値の範囲を求めよ。

230. 2次方程式 $x^2+2px+2p+8=0$ が次の条件を満たすように，定数 p の値の範囲を定めよ。

(1) 解がともに3より小さい。

(2) 3より小さい正の解と，3より大きい解をもつ。

TRY **231**. 2次不等式 $a(x^2+1)>x(a^2+1)$ を満たす x の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$ とする。　（愛知学院大・改）

TRY **232**. 次の2つの不等式について，下の問いに答えよ。

$x^2-13x+40\geqq 0$　……①　　$x^2+(k-4)x-4k<0$　……②

(1) ②の不等式が解をもたないような定数 k の値を求めよ。

(2) ①と②を同時に満たす x の値の範囲に含まれる整数値が5だけであるように，定数 k の値の範囲を定めよ。