バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第９７回　定義に戻ってじっくりと考える！

三角関数を含む方程式について講義した後，M君がやってきました．

「先生は授業の中で，『関数 $y=\tan x$ は連続だから…』と言っておられましたが，関数 $y=\tan x$ は連続関数ではないと思うのですが…．」

「えっ，関数 $y=\tan x$ は連続関数だけど…．」

「でも先生，例えば $x=\dfrac{\pi}{2}$ で不連続です．」

「連続関数ってどういうものかな．」

「ええっと，つながってる……」

「つながっている，とはどういうこと？」

「……」

「連続関数とは

> 区間 I で定義された関数 $f(x)$ がその定義域の各点で連続であるとき，$f(x)$ は連続関数であるという

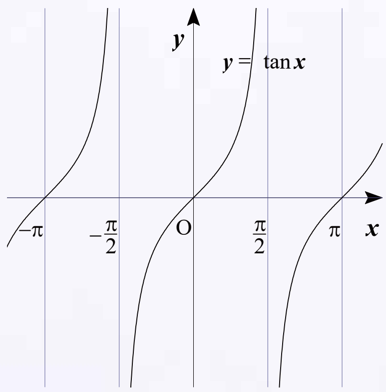
のだったね．

君はさっき，『例えば $x=\dfrac{\pi}{2}$ で不連続』と言ったが，そもそも $x=\dfrac{\pi}{2}$ は関数 $y=\tan x$ の定義域に含まれないのだから，連続，不連続を考えること自体，奇妙なことだな．」

「だったら先生，関数 $y=\tan x$ は連続関数ですか．」

「関数 $y=\tan x$ の定義域 I に属する任意の実数 c について，$\lim\limits_{x\to c}\tan x=\tan c$ であるから，関数 $y=\tan x$ は定義域 I の各点で連続，すなわち連続関数である．」

「でも，直観的には，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で $y=\tan x$ のグラフはつながっていないので，連続関数ではないような……．」



「数学だから，直観的に考えてはダメ！『定義に基づいて』考えないと！尤も，連続性に関しては，教科書にはいろいろな場合の例をたくさん挙げることはできないので，君が疑問に思ったのも無理はないけどね．」

「なるほど，連続ということは直感的につながっていることと単純に決めつけてはいけないのですね．」

「ある区間における連続に関しては，いろいろな内容があるのだが，それは将来の君の勉強にお任せしよう．

入試では，ある点における連続がテーマになることが多いかな．例えば，

> 関数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x\neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$ は $x=0$ で連続であることを示せ．

バックナンバーはこちら

のような．」

「任せてください．これならできます．$\lim_{x\to0}|f(x)|=\lim_{x\to0}\left|x\sin\frac{1}{x}\right|=\lim_{x\to0}|x|=0$ から $\lim_{x\to c}f(x)=0=f(0)$ となるので，$x=0$で連続です．あっ，僕は直観的に考えるのではなく，『定義に基づいて』考えていますね！」

「いいね．」

直観的に，あるいは，直感的に，数学を考えることに，数学に対する抵抗感を軽減させるという効用があるのはよくわかりますし，ある状況では実際，指導上有用である側面もあるのでしょうね．とくに初学者には．

でも，このM君のように，何か数学的なことに疑問を持ったときには，定義などに戻って

じっくりと考えてみるという姿勢

も大切ですね．その結果が入試対策に有用かどうかは別にして，

そのような姿勢は入試対策に極めて有用なものである

と思うのですが，いかがでしょうか．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**