バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第９６回　この定理，使っていいですか？？？

生徒たちには，ネットや出版物を通して，実に「いい加減な知識」に触れる機会も増えているようです．そうした生徒から「～の定理を使っていいですか．」という質問を受けることがあります．中には，「この問題はこうすれば簡単に求まります．」と教えてくれる（笑）生徒もいます．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

国立大の医学部を目指す，N君が講義の後にやってきました．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

「先生，ロピタルの定理，使ってはダメなのですか？」
「もちろん，正しい定理を数学的に正しく用いるのなら何を用いても問題がないのは当然だ！でも，ロピタルの定理？君は知っているの？」
「分数の極限が不定形なら，微分してもいいんです．」
「うーん，本当にわかっているのかなあ，ちょっと心配だなあ．」
「はあ？」
「いろいろな表現はあるが，例えば，少し雑だが次のように表したとしよう．」

（ロピタルの定理）

関数 $f(x)$，$g(x)$ は $x=a$ の近傍で定義され，$x=a$ を除いて微分可能であるとする．

$$\lim_{x\to a} f(x)=0,\quad \lim_{x\to a} g(x)=0,\quad g'(x)\neq 0$$

のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ が存在するならば，$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$ が成り立つ．

同様に，$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=\infty$，$g'(x)\neq 0$ のときなども成り立つ．

「はあ．．．そんな言い方でなく，もっと単純に $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=0$ のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

とは違うのですか．証明も学びました．$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=0$ から $f(a)=0$，$g(a)=0$ となって

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\quad\text{（誤り！！！）}$$

となります．」

バックナンバーはこちら

「$f(a)$, $g(a)$ が定義されていて $f(a)=0$, $g(a)=0$ ならいいが，そうでなければ？」
「はあ？」
「$f'(a)$, $g'(a)$ が存在することは仮定されていないよ．」
「はあ．……．僕の証明では，……，ダメなんですか？」

「本当に理解していないと，証明はおろか，使うときに誤用することもある．いい加減な断片的知識を振り回すような勉強は，感心しないね．」
「先生，正しい定義と証明を教えて下さい．」
「そのためには，君は極限に関してもう少し先のほうまで学ばないと！」
「わかりました．今の僕にはその余裕がありません．将来の楽しみにしておきます．」
「ロピタルの定理について，少しでも勉強してみたら，こんなすごい定理をたかがちょっとした極限値を求めるのに使うのが恥ずかしくなるかもしれないね．」

物わかりのいい(？)，N君は，すぐに納得してくれます．

自分の知識が不確かなものである（あるいは間違っている）ということを，わかってもらうのが，いいのでしょうね．

単に，教科書にないからダメ，試験で減点される，とかは理由になりませんし，納得もしないでしょう．

納得のためには，その定義や定理についての知識が正しく正確か，証明が正しくできるか，などして，気づいてもらわないとなりません．あるいは，よくわかってないと理解できない実例（例えば，$\lim_{x\to a} f'(x)$, $\lim_{x\to a} g'(x)$ は存在しないが $\lim_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ は存在する例とか)を挙げるのもいいかもしれませんね．

ロピタルの定理に限りません．この数か月でも，外積は使っていいですか，とか，オイラーの定理は使っていいですかとか，きかれました．

数学を先のほうまで正しく勉強している生徒も稀にいます．ちなみに以前，大学院で数学を学んだ生徒がいました！本当に理解して正しく使って減点されるはずありません．大学院レベルの答案を書いたでしょうから！採点する先生もいい加減な断片的知識かどうかは見抜くと思います．もちろん彼は合格しました．

それに，本当に理解している生徒は，「使っていいですか？」などと質問はしないでしょうね．このような質問をする生徒は，自分でも不確かな知識とわかっていて，不安なのでしょうから，不確かなものはダメと安心させる(？)のがいいのかなと思います．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**