バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第９５回　たかが，積分計算！？

単に計算に過ぎない, 積分計算にも, いくつかの特徴的な考え方があります.
まず, 逆関数と積分がテーマのこの問題です.

関数 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ に対して，$g(t)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-t|dx$ とおく．次の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ $(0\leqq x\leqq 1)$の最大値と最小値を求めよ．

(2) $g(0)$と$g(1)$の値を求めよ．

(3) 関数 $f(x)$の逆関数 $f^{-1}(x)$を求めよ．

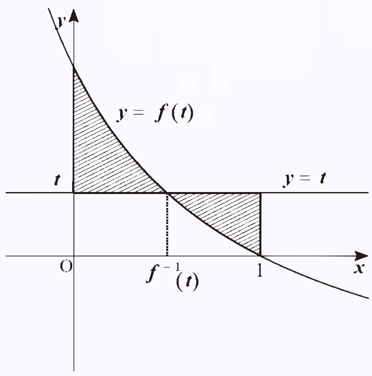
(4) $g(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$の最小値を求めよ．

（2018　名古屋工大）

この問題の(4)において,

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}\ (0\leqq x\leqq 1)$$

に対し，$g(t)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-t|dx$， さらに，$g'(t)$ を求めようとするとき，
すでに $f^{-1}(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$ $(=f(x))$を求めているので，
$g(t)=\displaystyle\int_0^1|f(x)-t|dx$ の表す，右の図の斜線部を，«首を横にして» y を
積分変数とみて積分すると考えてみます．絶対値は自動的にはずれ



$$g(t)=\int_0^1|f(x)-t|\,dx=\int_0^t(1-f^{-1}(y))dy+\int_t^1 f^{-1}(y)dy$$

となります．これから

$$g'(t)=(1-f^{-1}(t))-f^{-1}(t)=1-2f^{-1}(t)=1-2\cdot\frac{1-t}{1+t}=\frac{3t-1}{t+1}$$

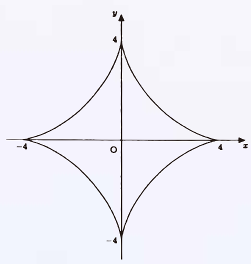
と計算を進めることができ，$g(t)$ の絶対値を含む積分の具体的な計算はしなくて済みそうですね．

もう一つ，見てみましょう．

$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，媒介変数 t で表された曲線

$$\begin{cases} x=3\cos t+\cos 3t \\ y=3\sin t-\sin 3t \end{cases}$$

を C とする．



(1) C の長さを求めよ．

(2) C で囲まれた領域の面積を求めよ．

（2017　信州大・理，医）

バックナンバーはこちら

媒介変数を用いて表されたアステロイドの弧長と面積を問う典型的な問題ですが，面積については
ちょっとした計算の仕方で計算量は変わります．

少し頑張って

$$S=4\int_0^4 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{dt}dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3 t\cdot 12\cos^2 t(-\sin t)dt=4^2\cdot 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt=\cdots\cdots=6\pi$$

とするのが標準的な解法ですが，ここでは

$$S=4\int_0^4 ydx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 y\frac{dx}{dt}dt=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3 t\cdot 12\cos^2 t(-\sin t)dt=4^2\cdot 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt$$

またまた，«首を横にして» y を積分変数とみて積分すると考えてみると

$$S=4\int_0^4 xdy=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\frac{dy}{dt}dt=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^3 t\cdot 12\sin^2 t\cos t dt=4^2\cdot 12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt$$

辺々加えて2で割ると

$$\begin{aligned}S&=4^2\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t(\sin^2 t+\cos^2 t)dt\\&=4^2\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt\\&=4\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt=4\cdot 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt=4\cdot 3\left[t-\frac{1}{4}\sin 4t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi\end{aligned}$$

となり，積分の計算はごくわずかになりました．

「そんなの大して変わらないじゃあない」

と思われるかもしれません．確かにここに挙げた例は，比較的素朴な例なので，どのように（正しく）計算しても時間的に大して差はないでしょうが，

たかが，積分計算ですら，いろいろと考えることができる

というのは面白いことですね．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**