

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第93回 僕の計算では、こうなります？

複素数の性質は、受験生には受け入れるのが難しいような気がします。日常には、まずお目にかからないからでしょうか。（実は、日常生活の中で、彼らが気づかないところで複素数は大活躍しているのに!）

方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。正の整数 n について、 $\omega^{2n} + \omega^n + 1$ の値を求めよ。

という基本問題に対し、

$$\begin{aligned} n \text{ が } 3 \text{ の倍数 のとき, } & \omega^{2n} + \omega^n + 1 = 3, \\ n \text{ が } 3 \text{ の倍数 でないとき, } & \omega^{2n} + \omega^n + 1 = 0, \end{aligned}$$

と話した後、K君がやって来ました。

「先生、僕の計算では、3しか出ないのです。」

「は？」

「 ω は $x^3=1$ の解だから、 $\omega^3=1$ となります。これを使うと、3しか出ないのです。」

「へ？」

「ええっと、

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = (\omega^3)^{\frac{2n}{3}} + (\omega^3)^{\frac{n}{3}} + 1 = 1^{\frac{2n}{3}} + 1^{\frac{n}{3}} + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

となります。」

「ひえっっ！」

「何か変ですか？」

「では、聞か、

$$\begin{aligned} i &= (i^4)^{\frac{1}{4}} = 1^{\frac{1}{4}} = 1 \\ -1 &= \{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

はどうだ？正しいか？」

「正しくありません。 i が1のはずありませんし、 -1 が1に等しいはずがありません。」

「それなら、つねに $\omega^{2n} + \omega^n + 1 = 3$ 、という、君の考え方はおかしいように思わないか？」

「先生、確かに、ぼくの考え方はどこか間違っているようです。」

「指数法則がどんなときに成り立つのか、教科書で調べてみなさい。」

.....

K君の誤りは2つあります。

- ① 定理・公式が《どのようなときに使えるかに関心を持って》身につけていない。
- ② 自分の考えが間違っているようなら、まず式の変形の1つ1つを吟味し、よくわからなければ教科書などで調べてみる、ということを経ずに、質問している。

.....

こうした生徒には、どのように対応すればいいのでしょうか？

.....

1 同じような誤りを含む易しい例を示し、自分の主張が誤っていることを自ら感じさせる。

自分の主張が何か変だと思いつつも（だから質問に来るのでしょうか）、自分の中では数学的、論理的に、正しいはずだとも思っています。きっと何か特別なことがあるのではないかと、ときには先生が誤っているのではないかと疑い？すらもっています。だから、君の考えは間違っているよ、ではなかなか納得しません。（表面上は納得したようにふるまうのですが。）なかなか頑固です。でもそのくらいの頑固さは、ある種、頼もしさでもあります。

彼には、自ら納得するような体験を与える必要があります。ちょっと大げさな言い方になりましたが、要は、自分の主張が誤っていることを実感してもらうことです。そのためには、彼の誤りと本質的に同じ誤りで、できるだけシンプルなものを提示することでしょうか。上にあげた $i=1$ や $-1=1$ となる例がそれですね。

2 どこが間違っているのか、その手がかりを与えて、教科書などを参照し、自分で解決させる。

生徒が実感したなら、後はできるところまで自分で解決させることですね。自分で解決し納得したことを、忘れるはずはありません。最近、親切に教えることがいいような風潮ですが、自ら学ぶ機会を奪っているかもしれません。このような頼もしい生徒に学ぶ機会を失わせてはいけないと思うのですが、いかがなものでしょうか。

.....

恒例の「勝手に！第8回大学入試問題検定！！」です。

上級問題

またまた、今年の入試問題の、愉快的テーマの問題を紹介しますね。

受験生が100人の試験が実施され、この試験を受験した智子さんの得点は84(点)であった。またこの試験の得点の平均値は60(点)であった。

なお、得点の平均値が m (点)、標準偏差が s (点) である試験において、得点が x 点である受験生の偏差値は

$$50 + \frac{10(x-m)}{s}$$

となることを用いてもよい。

.....

で始まる受験生にとって生々しい問題を出したのは、どこの大学でしょうか。

でも、智子さんって一体、誰なのでしょう？平均値よりも高い得点を取ることができる生徒のようですね。

智子さん？知っていますか？私は知りません。でも成績上位の智子さん...これから...
どこの大学の問題かわかりますか？

前回の答は、九州工業大学 でした。