

## 先生方のための徹底入試対策講座

## 第92回 やっぱり入試問題は楽しい！

今年の入試問題で、ちょっと気に入ったものがあります。まずは、これから見てみましょう。

次の問いに答えよ。

- (1) 1, 4, 9, 16 のように、自然数の2乗で表せる数を平方数という。  $n$  を平方数でない自然数とすると、 $\sqrt{n}$  は無理数であることを示せ。
- (2)  $a, b$  を正の有理数、 $n$  を自然数とすると、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1}$  は無理数であることを示せ。
- (2018 佐賀大・理工)

(1)は定番の背理法ですね。  $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$  とおくことで、 $n$ が平方数となり（与えられた条件に矛盾する）、容易に解決します。

しかし、(2)でも背理法で示そうと、 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = \frac{r}{s}$  ( $r, s$ は互いに素な自然数)とおいただけでは、簡単には解決しません。この有理数の置き方が万能の様な気がするのですが、そのようなパターン認識に陥ってはいけません。(1)で示したことを用いるのですね。 $a\sqrt{n} + b\sqrt{n+1} = r$  ( $r$ は有理数)と仮定するだけでよく、両辺を平方して  $\sqrt{n(n+1)}$ も有理数を得ます。(1)の対偶から  $n(n+1)$ は平方数であり  $\sqrt{n(n+1)}$ は自然数。 $n$ と  $n+1$ の間に自然数は存在せず、矛盾となりますよね。

次の問いに答えよ。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

- (1) 定積分  $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx + \int_1^e (\log y)^2 dy$  の値を求めよ。
- (2)  $f(x) = \tan x$  とする。関数  $y = f(x)$  は  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$  の範囲で逆関数  $x = f^{-1}(y)$  を持つ。  
定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^1 f^{-1}(y) dy$  の値を求めよ。
- (3) 定積分  $\int_0^1 e^{x^2} dx + \int_1^e \sqrt{\log y} dy$  の値を求めよ。

(2018 大阪市立大学・理, 工, 医)

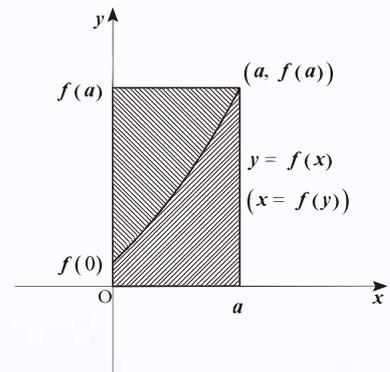
3つの積分値を求める問題になっていますが、実は1つの計算がもとになっています。単調に増加する関数  $f(x)$  が区間  $0 \leq x \leq a$  で逆関数をもつとき、逆関数が存在して

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\begin{aligned} \int_0^a f(x) dx + \int_{f(0)}^{f(a)} f^{-1}(y) dy &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a x \frac{dy}{dx} dx \\ &= \int_0^a f(x) dx + \int_0^a x f'(x) dx = \int_0^a (f(x) + x f'(x)) dx \\ &= \int_0^a (x f(x))' dx = [x f(x)]_0^a = a f(a) \end{aligned}$$

の計算から, (1)  $f(x)=e^{\sqrt{x}}$ ,  $a=1$  (2)  $f(x)=\tan x$ ,  $a=\frac{\pi}{4}$  (3)  $f(x)=e^{x^2}$ ,  $a=1$  として, 積分の値は  
 (1)  $1 \cdot e^{\sqrt{1}} = e$  (2)  $\frac{\pi}{4} \tan \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$  (3)  $1 \cdot e^{1^2} = e$  となります.

この積分をグラフで考えると, 右のように,  $\int_0^a f(x)dx$ ,  $\int_{f(0)}^{f(a)} f^{-1}(y)dy$   
 の2つの積分が表す面積の和が長方形の面積  $af(a)$  で表されていること  
 を示していますね.



では, 恒例の「勝手に! 第8回大学入試問題検定!!」です.

**中級問題**

前回に引き続き, 今年の入試問題の, なかなか愉快的なテーマの問題を紹介しますね.

人工知能ベンチャータウンにある A 社と B 社は, 「はい」か「いいえ」で答えられる質問に回答する知能ロボットを開発した. 質問に対して, A 社製のロボットは,  $\frac{4}{5}$  の確率で正しい答えを返し,  $\frac{1}{5}$  の確率で間違った答えを返す.  
 . . . . .

で始まる問題を出題したのは, どの大学でしょうか.

このような研究を行っているのでしょうか. 文系の大学ではないでしょうか. 国立の〇〇工大かな.

前回の答は, 慶応大学でした. ちなみに学部は総合政策学部です.