バックナンバーはこちら

第８４回　ガウス記号は難しい？

あの偉大な数学者ガウスの名を冠する記号，ガウス記号は，「整数の性質」が数学Aに入って以来，入試問題ではよく見かけるものになっています．もちろん，以前から旧帝大を中心に出題されていましたが，どの大学でも出されるというものではありませんでした．

さて，ガウス記号を思い出してみると，

> 実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表し，この記号 [ ] をガウス記号という

のでした．

入試問題においては，この記号の基本的な性質

$$[x] \leqq x < [x]+1 \quad \text{あるいは} \quad x-1 < [x] \leqq x$$

や，定義から得られる

$$x=[x]+\alpha \ \ (0 \leqq \alpha < 1)$$

で，解決がつくことが多いのですが，整数に関する記号だけに，受験生はさまざまな直感（直観？）を用いることが少なくありません．どのようなものか，受験生の用いた実例をもとに，考えてみます．

> 任意の実数 x，y について
> （ア）$x-y<1 \Rightarrow [x]=[y]$
> （イ）$\dfrac{[2x]}{2} \leqq \dfrac{[3x]}{3}$
> （ウ）$-[-x]=[x]$
> （エ）$[-x+1]=-[x]$
> これらは，正しいでしょうか？

順に考察してみると，

（ア）について

x と y の差が1より小さいので整数部分は変わらなく......と考えたのでしょうね．

でも，$x=2.1$，$y=1.2$ は反例となっています．数直線を念頭に置くと，考えやすいかもしれません．

（イ）について

例えば，$x=0$ なら $\dfrac{[2x]}{2}=\dfrac{[3x]}{3}$，　$x=\dfrac{1}{3}$ なら $\dfrac{[2x]}{2}<\dfrac{[3x]}{3}$，　$x=\dfrac{2}{3}$ なら $\dfrac{[2x]}{2}<\dfrac{[3x]}{3}$，
$x=1$ なら $\dfrac{[2x]}{2}=\dfrac{[3x]}{3}$．

どうやら正しそうな気がします．そう思えば，証明が必要ですね．そこで，n を整数として

バックナンバーはこちら

$$n \leqq x < n+\frac{1}{3},\quad n+\frac{1}{3} \leqq x < n+\frac{1}{2},\quad n+\frac{1}{2} \leqq x < n+\frac{2}{3},\quad n+\frac{2}{3} \leqq x < n+1$$

の場合に分けて証明を試みると，正しくないことに気付くはずです．$x=\frac{1}{2}$ なら $\frac{[2x]}{2} > \frac{[3x]}{3}$ ですよね．

（ウ）も，もっともらしく見えますが...... $x=\frac{1}{2}$ なら，正しくありませんね．$-[-x]=-(-1)=1$，$[x]=0$ ですから．それならば（エ）は正しそうな.....でも，$x=1$ なら，正しくありませんね．

こうした誤りをしないためには，こうかなと思ったら，証明を試みる，怪しいなあと思ったら反例を探す，などの論理的，すなわち数学的に考えようとする態度があれば十分です．

根拠もなく，直感だけで数学を捉えようとするのは，態度として誤りだと思います．もちろん

十分な学力をつけたうえで，さまざまな知識，論理，経験を通して，
こうじゃないかな ... と思うのは，「あり」ですね．

こうした学力を前提とする予想は，いわゆる直感とは別物です．数学の世界にも，いくつもの「〜〜予想」と呼ばれるものすらありますよね．

たとえ，無根拠の直感をしたとしても，それには証明が伴うべきものですから，そうなると，もはや単なる直感ではなくなる！はず？ですから．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**