バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第８２回　続・ヘッチャラな生徒たち？

このような問題がありました．

（問題）　$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とするとき，$\cos 3\alpha=\cos 4\alpha$ を示せ．

これは

（答）　$\alpha=\dfrac{2\pi}{7}$ とするとき，$3\alpha=2\pi-4\alpha$ から

$$\cos 3\alpha=\cos(2\pi-4\alpha)=\cos 4\alpha$$

とするのが，当然！？ですが…

「先生，和を積に直す公式を用いてはダメですか？

$$\cos 3\alpha-\cos 4\alpha=-2\sin\frac{7\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=-2\sin\left(\frac{7}{2}\cdot\frac{2\pi}{7}\right)\sin\frac{\alpha}{2}=-2\sin\pi\sin\frac{\alpha}{2}=-2\cdot 0\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=0$$

よって，$\cos 3\alpha=\cos 4\alpha$ となります．」

「ダメではないけれど，せっかく $3\alpha=2\pi-4\alpha$ という関係があるのだから，これを用いるのがいいと思うけどね…」

「でも，そのようなやり方は

思いつきません

私は，和を積に直す公式で解こうと思います．」

「……」

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（問題）$x\geqq 0$ のとき，つねに不等式 $e^x\geqq 1+x+ax^2$ が成り立つような実定数 a のとりうる値の範囲を求めよ．

これは典型とは言え，かなり難問ですよね．答は $a\leqq\dfrac{1}{2}$ となります．これを講義したのち，

「先生，背理法で解きました．」

「えっ？」

（生徒のノート）

$a>\dfrac{1}{2}$ を仮定すると，$e^x\geqq 1+x+ax^2>1+x+\dfrac{1}{2}x^2$ から

$$e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$$

$x=0$ を代入して　　$e^0>1+0+\dfrac{1}{2}0^2$

よって，　　$1>1$（不合理）

ゆえに，求める範囲は　　$a\leqq\dfrac{1}{2}$

バックナンバーはこちら

「このほうが，簡単に解けます．」

「でも，$ax^2 > \frac{1}{2}x^2$ は間違っているよ．だから，$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ は成り立たない．それに，$a > \frac{1}{2}$ を仮定すると矛盾ということから，とりうる値の範囲は $a \leqq \frac{1}{2}$ とは言い切れない．」

「では，先生，

どこを直せば正解に

なりますか？」

このような生徒は，謙虚さがないということで片づけられないようです．

・　先生の考え方を学ぼうとしない

・　論理的に考えを進めようという気がない

これらが，かなり気がかりです．

対処法は，これらを自覚させる（してもらう）ことでしょうか．

では，恒例の「勝手に！　第7回大学入試問題検定！！」です．

上級問題

Σが二つある有限和の式が与えられていますが，よく見ると，＝が二つあり，二通りの表現が書かれています．これをヒントに考えるのですが，ヒントとは書かずに，さりげなく二通りの表現をする，この雅な問題は，ある県立医科大学での今年の出題です．この雅な県の，雅な問題を出した県立医科大学は？　ズバリ当ててください．

n は正の整数とする．S_n を有限和

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{6^{2i}+6^i6^j}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{6^{2i}+6^i6^j}\right)$$

で定める．このとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**