バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第８１回　ヘッチャラな生徒たち？

先生がたも，大学入試の季節が終わり（桜の季節も終わり）新学期が始まりました．また，日常生活に戻ったという感のある昨今でしょうね（少なくとも私はそうです）．

さて，今年の入試問題について，もう生徒諸君からご質問を受けています．

定数 c は $-1 < c < 1$ を満たすとする。すべての実数 x に対して，関係式

$$f(x) + f(cx) = x^2$$

を満たす連続関数 $f(x)$ を求めよ。

（2017　早稲田大・教育　1(4)）

「先生，これでいいですか」

彼の持ってきたノートには次のようにありました．

(彼のノート)

$f(x) + f(cx) = x^2$ の両辺の次数を比べて，$f(x)$ は 2 次式と分かる．

よって，

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

と表せて

$$(ax^2 + bx + c) + (ac^2x^2 + bcx + c) = x^2$$

両辺の係数を比べて，

$$\begin{cases} a + ac^2 = 1 \\ b + bc = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$$

したがって，

$$a = 1,\quad b = 0,\quad c = 0$$

$$f(x) = x \quad \text{（もちろん誤答）}$$

「先生，ダメですか？」

「どうして，2次式と分かるのかな？　そもそも係数比較していいのかな？　どこにも多項式であるという条件は与えられていないよ．」

「…」

「それに，さっき僕が授業で話した結果と違っているのだが…．君はどう思っていたのかな？」

「…」

バックナンバーはこちら

与えられた条件が少なく，手掛かりが得にくい問題です．もちろん，多項式かどうかは分かっていません．微分可能性すら保証されていないのです．だからと言って，勝手に2次式と断定できませんよね．

問題点は3つあります．

- 定数cの意味が解っていないこと
- 授業の結果と異なるのに，ヘッチャラであること
- 問題文に連続関数という条件があるが，考察せず，ヘッチャラであること

本当は，あとの2つが大きな問題なんですが．

問題文の中にヒントはあるものです．

連続関数であるという条件から，極限を用いるかもしれないと思えるでしょう．cの値の範囲から，べきをつくれば，例えば，$\lim_{n\to\infty} c^n = 0$であるので，極限をつくれば0となることを示唆しているようです．これをヒントにして関係式を繰り返し用いて

$$f(x) = x^2 - f(cx),\ f(cx) = (cx)^2 - f(c^2x),\ \cdots$$

となるので

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - f(cx) \\
&= x^2 - \{(cx)^2 - f(c^2x)\} \\
&= x^2 - c^2x^2 + \{(c^2x)^2 - f(c^3x)\} \\
&= x^2 - c^2x^2 + c^4x^2 - \{(c^3x)^2 - f(c^4x)\} \\
&= \cdots\cdots \\
&= x^2 - c^2x^2 + c^4x^2 - \cdots + (-1)^n c^{2n}x^2 - (-1)^n f(c^{n+1}x)
\end{aligned}$$

初めからn項は公比$-c^2$の等比数列，最後の項では$\lim_{n\to\infty} c^{n+1} = 0$が使える．これで，解法の道筋はついたはずですね．$f(x) = \dfrac{1}{1+c^2}x^2$（答）を得ます．

こうした生徒に対する対処法は…

この生徒は，自分が「理不尽なことを言っている」という『自覚』が欠如しているように思います．これをやんわりと指摘して，自覚してもらうしかありませんね．

「勝手に！第7回大学入試問題検定！！」前回の答は，東京大学（理科の第4問です．）

今回の問題は，休載させてください．ごめんなさい．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**