バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第７４回　数学は条件反射？！？

とんでもないことを言う方がいるのだなあと思っておりました．「数学は暗記だ」という方々です．誤りですよね．「暗記で数学ができるようにならない」ことは，すでに今さらお話する必要はないと思います．もちろん，公式を覚えたり，その証明を学んだりは，必要です．でも，数学で学ぶのはその考え方であって，「暗記ではない」のですね．本来数学の醍醐味は経験した過去以上のものを見出すところにあります．覚えることも必要じゃあないかといわれればその通り，でも，「数学は暗記だ」（誤り!!!）といわれれば，暗記すれば数学ができるようになると錯覚するかもしれません．

ところが最近はさらに驚くべきことがあります．「数学は条件反射だ」ということです．もちろん，誤りですし，そのように言葉でいう方は多分おられません．しかし，若者の間で，確実にこのような「思想（なんて高尚なものではなく，生物的反応？）」が蔓延しだしているのです．

すべての自然数 n に対して

$$\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}$$

は整数であることを証明せよ．

（2016　学習院大・法）

$\frac{4}{3}$ は仮分数なので最後の項からnを分けて，次のように通分して，容易に示せます．

【略解】

$$\begin{aligned}\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}&=\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{3}+n\\&=\frac{n(n^2-3n+2)}{6}+n\\&=\frac{(n-2)(n-1)n}{6}+n\end{aligned}$$

ここで，3 つの連続する整数 n–2，n–1，n のうちに 3 の倍数，偶数は必ず含まれるので，

$(n-2)(n-1)n$ は 6 の倍数である．よって $\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$ は整数であり，

ゆえに $\frac{n^3}{6}-\frac{n^2}{2}+\frac{4n}{3}$ は整数である．

「先生，この問題，数学的帰納法で証明してはいけませんか．」
「構わないけど，何でそんな面倒なことをするの？」
「簡単です．ええっと，$n=1$ のときは1となるので整数です．$n=k$ のとき，整数であることを仮定して，$\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}+\frac{4k}{3}=N$ （N：整数） とおくと，

バックナンバーはこちら

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)^3}{6}-\frac{(k+1)^2}{2}+\frac{4(k+1)}{3}&=\frac{k^3+3k^2+3k+1}{6}-\frac{k^2+2k+1}{2}+\frac{4k+4}{3}\\&=\frac{k^3}{6}-\frac{k^2}{2}+\frac{4k}{3}+\frac{3k^2+3k+1}{6}-\frac{2k+1}{2}+\frac{4}{3}\\&=N+\frac{3k^2-3k+6}{6}=N+\frac{k^2-k+2}{2}\\&=N+\frac{k(k-1)}{2}+1\end{aligned}$$

k，$k-1$のいずれかは偶数だから，これは整数となります.」

「まあこれも，そんなに複雑ではないけど，3つの連続した整数は3！の倍数であることは知っているよね.」

「はい，よく知っています.」

「それなら，数学的帰納法を使うまでもなく…」

「でも，

自然数なら数学的帰納法

です.」

「えっ………」

いろいろ考えて数学的帰納法が最も適切だと思って，ということなら，数学的帰納法を用いてもいいと思うのですが，考えるまでもなく「整数」という言葉で「数学的帰納法」と反応しているようです．これはもはや，解法を暗記する以前の「条件反射」に近いものです．

膝の下をたたくとピコンと足が上がるように，延髄で反射しているのではないか

と思ってしまいます．

延髄反射で数学ができるとはとても思えません．

あるレベル以上の受験生にとって，数学の勉強で大切なことは，解けることではありません．問題を分析し，「思考と論理を武器として」考察し，解決に向かっていこうとすることです．

しかし，これができない先ほどの「条件反射」の生徒には，「こういう解があるよ」といくら言っても「条件反射」は治りません．なぜなら

「自分が初めに反応した方針」で解答にたどり着きたいと思っている

からです．少々面倒な過程や計算があっても，選りすぐった解法の方針を見出すことの方が，消費エネルギーが多くいると思っているからです．だから，彼は自ら考えようなんて思いもしません．燃費の少ない条件反射で済まそうとしているのです．

こうなると，彼には強引に数学の世界を体験させてやるしかありません．まず，「最後の項からnを分けて，通分させ，その分母 $n(n^2-3n+2)$ を因数分解させる」，ここまで自分で計算させます．自分で容易に示せることを実感させるのです．実感しても1度や2度ではそう簡単に「条件反射」の数学から改善するとは思えないのですが，このような数学的体験を繰り返しさせていくことですね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**