バックナンバーはこちら

第７３回　ωって１ですか？？！

「先生，ωって１ですか？」
「何を唐突に言い出したのかな？　オメガはあの，１の虚三乗根のことかな．」
「はい，そうなんですけど．」

「$x^3=1$から $(x-1)(x^2+x+1)=0$ よって，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ となる．で，それがどうしたのだ？」

「ええっと，

$$\omega=(\omega^3)^{\frac{1}{3}}=1^{\frac{1}{3}}=1$$

となるように思うのですが，でもωは１ではないですよね．」

「もちろん！！　さっき解いたようにωは $\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ のいずれか一方だったね．」

「でも僕の計算では１になります．どこも間違っていないように思うのですが...」
「間違っているね．たとえば，君の流儀だと

$$i=(i^4)^{\frac{1}{4}}=1^{\frac{1}{4}}=1$$
$$-1=\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}}=1^{\frac{1}{2}}=1$$
（いずれも誤り）

となるようだ．何でも１かな．」
「先生，どこが間違っているのですか？　じらさないで教えてください．」
「まず，$\omega=(\omega^3)^{\frac{1}{3}}$ だな．」
「どうしてダメなのですか？　$\omega^3=1$だし，$1^{\frac{1}{3}}=1$だと思いますが...」
「もちろん，それらは正しい．でも，$\omega=(\omega^3)^{\frac{1}{3}}$ は困るな．」
「でも先生，先日の講義で

$$\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1^k=1 \quad (k\text{ は整数})$$

と指数法則を使っておられたではありませんか．」
「あれはいいのだ．」
「先生なら使っていいのですか！？」
「指数が$3k$のように整数のときは，ω^{3k}はωを$3k$個かけたものだが，指数が一般に実数のときはそうはいかない．

> $a>0$ で r，s が実数のとき，
>
> $$(a^r)^s=a^{rs}$$

となるのだったね．」
「そういえば，そんな気が...」

••••••••••••••••••••••••••••••••••••

バックナンバーはこちら

指数を整数，有理数，実数と順に拡張していくとき，定義する前提が変わっていくことがよくあります．受験生は，指数法則を初めて学ぶとき，まだ，複素数平面を学んでいないのが普通です．したがって，指数法則の前提を学ぶときも，複素数で成り立つのかどうかまで考えることがなくても，むしろ当然ですね．

このほか，例えば，２次方程式の解の公式，解と係数の関係が，複素数係数の２次方程式で成り立つか否かについても，同じような混乱がある受験生もいるようです．

複素数平面を学んだときは，それまでのいろいろな公式や定理がどの範囲まで成り立つのか考察して，定理，公式を学び直すチャンスかもしれませんね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**