バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第７２回　直感的に収束すると思います！？

すべての正の実数xについて定義された微分可能な関数$f(x)$について，つねに$f(x)<m$を満たす定数mが存在すること（上に有界ということですね）を示す問題について講義しました．そのあと，A君がこのような別解を持ってきました．

「先生，$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ となるから，$y=f(x)$ のグラフは水平線に近づいていくので，つねに $f(x)<m$ を満たす定数 m が存在することになりませんか？」

確かに，$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$となるのですが，だからと言って，つねに$f(x)<m$を満たす定数$m$が存在するかどうかは別問題です．

「えっ，何でそうなるの？」
「$x\to 0$ のとき，接線が徐々に水平に近づいていくので $f(x)$ はある値に収束すると思うのですが．」
「えっ，何でそうなるの？　$\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ から $f(x)$ は $x\to 0$ のとき収束すると君が主張する理由がわからない．」
「直感的に，接線が水平になっていけば収束すると思います．先生，自明ではありませんか．違いますか．」
「では，例えば，関数 $f(x)=\sqrt{x}$ について考えてみよう．この関数は $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=0$ だけど，$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$と発散するよね．」
「あっ．そうですね……．わかりました．」

学生が数学的に誤っているとき，反例を示せば一応説得したことになります．しかし，A君は本当に納得しているかどうか不安です．

彼に関しての問題点は，結論が誤っていたということだけでなく

過程を全く論証しようとしていない

ことですね．直感がつねに正しい結果を得るとは限りません．人間の直感を信じないところから数学は始まっているといっても，過言ではないと思います．

いやいや，「直観」だ，という人もいるかもしれませんが，論証せずに結論を得たなら，数学的には「直感」も「直観」も同じことですよね．

世間に「直感の･･･」とか，「直観の･･･」とか「ほぼ～だから…」とかいう文言を見かけることがありますが，こうしたものがA君のような状況を助長しているのかもしれませんね．

バックナンバーはこちら

もちろん，直感を否定するわけではありません．直感が新しい発見につながることは少なくありません．しかし，それは十分な数学的な素養の上である種の根拠？をもつような直感（直観）であって，A君のような，「何となくそういう気がする」とか「ほぼこうなるだろう」とかいう類とは，全く別物です．

あくまで修行の身であるA君には直感（直観）で「こうだ」と思ったらそれを

論証するという姿勢が必要

ですね．そうすればこのような誤りはなかったでしょうね．

前回の「中級問題」の解答は，遊び心のある大学は，今年の年号2016とそれを逆に並べた6102が出されている遊び心のある出題をした，あの，東北学院大学でした．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**