

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第68回 簡単なこと聞いていいですか？

「先生，簡単なこと聞いていいですか？」

「簡単なことなら聞かなくてもいいのじゃあないか」

「でも自信がないのです。この問題なのですが。」

(1) x についての2次方程式

$$x^2 + mx + m + 3 = 0$$

の2つの解がともに正の数になるような m の値の範囲を求めよ。(2) x についての2次方程式

$$x^2 + mx + m + 3 = 0$$

の2つの解がともに $\frac{1}{2}$ より大きくなるような m の値の範囲を求めよ。

「で？」

「(1)の2つの解を α, β とすると，解と係数の関係を用いて $\begin{cases} \alpha + \beta = -m > 0 \\ \alpha\beta = m + 3 > 0 \end{cases}$ から $-3 < m < 0 \dots$ (誤答) とするだけではダメなんですよ。」

「判別式は $D = m^2 - 4(m + 3) = (m + 2)(m - 6)$ となるので，実数解をもつ条件 $D \geq 0$ から $m \leq -2, 6 \leq m$ 以上から， $-3 < m \leq -2 \dots$ (答) となる。」

「それはわかるのですが，(2)ですが，

2つの解を α, β とすると，解と係数の関係を用いて $\begin{cases} \alpha + \beta = -m > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \alpha\beta = m + 3 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$ から

$$-\frac{11}{4} < m < -1 .$$

さらに，実数解をもつ条件 $D \geq 0$ から

$$m \leq -2, 6 \leq m$$

以上から，

$$-\frac{11}{4} < m \leq -2 \dots \text{(誤答)}$$

とすると，2次関数のグラフを用いて解いたときの「(答) $-\frac{13}{6} < m \leq -2$ 」と微妙に違うのです。」

「それはそうだ。でたらめだ。じゃあまた。」

「先生，冷たいですよ。」

「年末，年始は何かと忙しいのだ。」

「忘年会とか新年会ですか？ せめて，どこが間違っているか教えてください。」

「(1)では

$$\alpha > 0, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$$

を用いたね。(2)では？」

「ええっと

$$\alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta > 1, \alpha\beta > \frac{1}{4} (\dots \text{誤り})$$

を用いました。」

「例えば、 $\alpha=1, \beta=\frac{1}{3}$ は $\alpha+\beta>1, \alpha\beta>\frac{1}{4}$ を満たすが $\alpha>\frac{1}{2}, \beta>\frac{1}{2}$ を満たさない。だから $\alpha>\frac{1}{2}, \beta>\frac{1}{2}$ と $\alpha+\beta>1, \alpha\beta>\frac{1}{4}$ は同値ではない。間違っている。」

「先生！ だったらどうするのですか。まさか、『あきらめろ』ではないですよ。」

「もちろんだ。こんな困った生徒をほったらかすわけにはいかない！ 君は、2つの点で誤っている。」

① $\alpha > 0, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ から $\alpha > \frac{1}{2}, \beta > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha + \beta > 1, \alpha\beta > \frac{1}{4}$ (…誤り) を類推したのだから、

その類推が正しいかどうか

を考えようとしていない。証明してみようという姿勢があれば、誤りはすぐにわかるはずだ。

② $\alpha > 0, \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta > 0, \alpha\beta > 0$ を用いようとするなら

2つの解 α, β が $\frac{1}{2}$ とともにより大きい $\Leftrightarrow \alpha - \frac{1}{2}, \beta - \frac{1}{2}$ がともに正の数である
 というように、同値なものは何かと考えていない。

要するに考えようとする姿勢がないことが問題なのだ。」

「すみません。

$$\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) + \left(\beta - \frac{1}{2}\right) > 0, \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\beta - \frac{1}{2}\right) > 0, D \geq 0$$

と考えるべきでした。」

このような生徒は一つ一つの誤りを指摘されるだけでは、いつまでたっても「質問の常連」です。どこかで、こうした姿勢を改めてもらう必要があります。もちろん僕が忙しいとか冷たいとかいう理由ではありません！！