バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第６７回　複素数平面上でどう動く？

複素数平面上での，図形の移動については，平行移動，回転移動が基本的ですが，線対称移動もありますね．教科書にはないテーマですが，少し考えてみましょう．

（例題１）

複素数平面上の点 P(z) に対し，次の式で定められる点 Q(w) を考える．

$$w=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\overline{z}$$

このとき，点 Q は点 P を直線　$x\cos\theta+y\sin\theta=0$　に関して線対称移動して得られる点であることを示せ．ただし，P≠O とする．

$z=x+yi$，$w=x'+y'i$ とおいて，計算を進めてみましょう．

方針１．

$z=x+yi$，$w=x'+y'i$　(x，y，x'，y'：実数) とおくと

$$\begin{aligned} w&=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\overline{z}\\ &=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)\overline{x+yi}\\ &=(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)(x-yi)\\ &=(x\cos 2\theta+y\sin 2\theta)+i(x\sin 2\theta-y\cos 2\theta)\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{cases} x'=x\cos 2\theta+y\sin 2\theta\\ y'=x\sin 2\theta-y\cos 2\theta\end{cases}$$

この結果に見覚えはありませんか．

そうですね，しばらく前に高校のカリキュラムから消えた，一次変換を思い出します．

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}$$

これは，原点を通り x 軸の正の向きとなす角が θ の直線 $x\cos\theta+y\sin\theta=0$ に関する線対称移動を表していますね．でも，現行の課程では，一次変換が含まれません．今の高校生には，これが線対称移動を表すことがわかりません．そこで，

（方針２）

点 P(z) を原点 O の周りに $-\theta$ だけ回転して，$\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z$ を得て，

これを，x 軸に関し線対称移動すると，$\overline{\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z}$　となり，

さらに原点 O の周りに θ だけ回転して，$(\cos\theta+i\sin\theta)\overline{\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z}$

バックナンバーはこちら

よって，点 P を直線 $x\cos\theta+y\sin\theta=0$ に関して線対称移動して得られた点は，

$$\begin{aligned}&(\cos\theta+i\sin\theta)\overline{\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}z}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)\{\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)\}\overline{z}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)\overline{z}\\&=(\cos\theta+i\sin\theta)^2\overline{z}\\&=(\cos2\theta+i\sin2\theta)\overline{z}\end{aligned}$$

したがって，点 Q は点 P を直線 $x\cos\theta+y\sin\theta=0$ に関して線対称移動して得られる.

となります.

さて，これを取り上げたのは，今年2015年の同志社大（文化情報・理工）に，この線対称移動が出題されているからです.

（例題２）

複素数 w_1 に対し，複素数 w_2，w_3 を

$$w_2=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_1},\quad w_3=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_2}$$

によって定める. w_3 を w_1 を用いて表せ.

（2015　同志社大・文化情報・理工など／一部）

$w_2=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_1}$，$w_3=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_2}$ を，いずれも線対称移動と2倍の拡大の合成変換と分かれば（同じ線対称移動を2度行えばもとに戻ることから） $w_3=4w_1$ は容易に見出せますね.

計算でも大したことはありませんが...

（解答） $w_2=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_1}$，$w_3=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_2}$ から

$$w_3=(1+\sqrt{3}i)\overline{w_2}=(1+\sqrt{3}i)\overline{(1+\sqrt{3}i)\overline{w_1}}=(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)w_1=4w_1$$

今年は新課程1年目で，複素数平面の分野の出題があるなら，せいぜい回転までとたかをくくっていたのですが，線対称移動まで出ています．要注意ですね.

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**