バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

# 先生方のための徹底入試対策講座

## 第６６回　ずっとやさしく解けました！？

「先生，別解が出来ました．先生の授業での解答よりずっとやさしく解けました．」
「何のことかな？」

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

彼の言う問題は

> 複素数平面において，複素数 $z$ は実部が正であるような複素数全体の領域を動くとする．このとき $w=-\dfrac{z}{z+1}$ によって得られる複素数 $w$ の動きうる領域を求め，図示せよ．

というものです．
講義では，

> $z$ の実部が正であることから
>
> $$\frac{1}{2}(z+\overline{z})>0$$
>
> 一方，$w=-\dfrac{z}{z+1}(\neq 0)$ から，$z=-\dfrac{w}{w+1}$ となるので，
>
> $$\frac{1}{2}\left\{-\frac{w}{w+1}-\overline{\left(\frac{w}{w+1}\right)}\right\}>0$$
>
> $$-\frac{w(\overline{w}+1)+\overline{w}(w+1)}{(w+1)(\overline{w}+1)}>0$$
>
> $$2w\overline{w}+w+\overline{w}<0$$
>
> $$\left|w+\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$$
>
> （以下，図示は省略）

としたのですが，「彼の別解？」は，不思議なものでした．もちろん誤答です．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

「$z$ の実部が正だから

$$z+\overline{z}>0$$

よって，

$$z>-\overline{z}$$

となるので，…」

バックナンバーはこちら

「ちょっと待った！　君の言う $z$ は，どんな数なのかな？」
「$z$ は実部が正であるような複素数です．」
「それなら，$z>-\bar{z}$ は奇妙に思わないか？」
「何か変ですか？ $z+\bar{z}>0$ において，$\bar{z}$ を移項しただけですが．」

このとき，「虚数に大小関係はなかったよね」で終わらせてしまうことも少なくありません．生徒も納得し，同じ間違いはしなくなるとは思うのですが，ここには，根深い原因がありそうです．

この生徒が誤った背景には，いくつかの，原因が想定されます．例えば，

- 一般に複素数に大小関係が定義されていないという認識がないこと
- 不等式が大小関係を表しているという認識がないこと
- 移項という操作が，何を省みることなく操作としてパターン化されていること

このうちのいずれか，あるいは別のものもあるかもしれません．

この一つ一つを問いただせば，おそらくは，わかってはいることと思います．にもかかわらず，こうした誤りは，決して少なくありません．

初めて不等式を学ぶときには，彼らはまだ実数の世界にいます．複素数を学ぶとき，複素数は実数とは多くの点で異なること，それまで学んできた実数に関しては成り立つことでも，複素数で

「成り立つかどうかを確かめながら」用いなければならない

ことを，しっかりと伝えなければ！と思います．

もちろん，実数と複素数に関してだけではありません．スカラーとベクトル，平面図形と空間図形でも，似たことはありますよね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**