バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

# 先生方のための徹底入試対策講座

## 第６５回　この公式，使えますか？

**1**　昨日のことです．

「先生，三角形の面積の公式は空間でも成り立つのですか？」
「えっ，どういうことかな？　何の公式？」
「先生！　面積の公式ですよ，ベクトルの．」

どうやら，三角形の面積をベクトルを用いて表した公式が，平面上の三角形には使ったことはあるけれど空間ベクトルの問題でも使えるか不安になってやってきたようです．

三角形 OAB の面積を$S$とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2|\overrightarrow{OB}|^2-(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB})^2}$$

と表される．

「で？　この公式がどうかした？」
「平面ベクトルの問題でなら，使ったことがあるのですが空間ベクトルの問題でも使えるのですか？」
「そんなの知らないよ．」
「ええっ，先生でもわからないのですか？」

単純明快な対応です．もちろん，使えるわけですが，その理由が大切なわけです．『使えるよ．』『空間でも使えるのですね．わかりました．』（何がわかったのでしょう？！！）で終わらせては，もちろんダメですよね．

「空間でも使えるかどうか，空間ベクトルを用いたその公式を導いてみたら？」
「………」
「どうして証明すればいいかわかるかな？」
「………」

証明の過程で，平面でも空間でも使える道具しか用いないので，どちらでも使えるのですよね．

公式がどの範囲で成り立つかは，証明を顧みればわかる

はずです．

この生徒は，この公式はここでは使えるとかここでは使えないとか，何でも理由もわからずにひたすら覚えようとしているのでしょうか？

驚きました！！！

バックナンバーはこちら

**2** 今日のことです．

「先生，各項が複素数の等比数列で，和の公式は使えますか？」
「どうしたのかな？」
「複素数の問題で $z_n=\alpha^{n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ について $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k$ と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ を求めなければならないのですが，和の公式が使えるかどうかわからなくて….」
「複素数の範囲でその公式を導いてみたら？　導けるようなら使えるし，導けなかったら使えないということになる．」
「そうですね，わかりました．複素数の範囲で証明してみます．ええっと，……
$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくと，

$$\begin{aligned} S_n &= 1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-2}+\alpha^{n-1} \\ \alpha S_n &= \alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots\cdots+\alpha^{n-1}+\alpha^n \end{aligned}$$

辺々引いて

$$(1-\alpha)S_n=1-\alpha^n$$

あっ，わかりました．ここまでの計算は複素数の範囲で出来るものです．だから，和の公式は複素数の範囲で成り立ちます．よくわかりました．ありがとうございました．」

| 公式の証明は証明問題で使うだけでなく，公式のもつ様々な疑問に答えてくれる |
|---|

のですね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**