バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第６４回　こんなこと，思いつきません！

「先生，$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ の値はどうなるのですか？」
「唐突に何を言い出すのかな？そんなのすぐにわかるはずがないじゃあないか！」
「でも・・・」

等式

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1 \cdots (*)$$

が知られている．左辺を見て，右辺を想像することは一見難しい．
３次方程式 $x^3+3x-4=0$ を用いて，上の等式（＊）を証明せよ．　　（2015　横浜市立大･医）

「この値がどうして1になるのですか？」
「問題に書いてあるじゃあないか！　『左辺を見て，右辺を想像することは一見難しい』と！　難しいのだ！ だから，3次方程式を用いて（＊）を証明することだな．まあ，頑張りたまえ」
「先生，僕の質問，面倒がっていませんか？　また，啓林館のHPの原稿に時間を追われているのですね．」
「ばれたか，今ちょうど，そのネタを考えていたところだ．」
「それなら，このことを書けばいいのじゃあないですか．いいアイデアでしょ，先生！」
「なるほどなるほど，それはいい考えだ．」
「エッヘン」
「君は何をそんなに威張っているのだ？」

「証明は出来ました．」

$\alpha=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ とおくと，

$$\alpha^3=\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)^3=\left\{\left(\sqrt{5}+2\right)-\left(\sqrt{5}-2\right)\right\}-3\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\left\{\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right\}$$
$$=4-3\cdot1\cdot\alpha=4-3\alpha$$

よって，$\alpha^3+3\alpha-4=0$ が成り立ち，

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ は $x^3+3x-4=0$ の実数解である．…（ア）

一方，$x^3+3x-4=0$ から $(x-1)(x^2+x+4)=0$．ここで，$x^2+x+4=0$ の判別式 $D=1^2-4\cdot1\cdot4=-15<0$ から

$x^3+3x-4=0$ の実数解は，1 のみである．…（イ）

（ア），（イ）から，等式 $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}=1$ …（＊）は成り立つ．

「証明はこれでよくできている．じゃあ，また．」
「先生！　やっぱり，面倒がっています．僕は，なぜ，この方程式 $x^3+3x-4=0$ から $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ が見つけられたのか知りたいのです．」
「仕方がない．少しだけ話そう．」

バックナンバーはこちら

1 の虚 3 乗根の一つを ω とするとき，恒等式

$$x^3+a^3+b^3-3abx=(x+a+b)(x^2+a^2+b^2-ax-bx-ab)$$
$$=(x+a+b)(x+a\omega+b\omega^2)(x+a\omega^2+b\omega)$$

が成り立つので，

方程式 $x^3-3abx+a^3+b^3=0$ の解は，$x=-a-b,\ \ -a\omega-b\omega^2,\ \ -a\omega^2-b\omega$ である．… (a)

ここで，方程式 $x^3+3x-4=0$ について，上の方程式と比べて

$$-3ab=3,\ \ a^3+b^3=-4,\ \text{すなわち},\ a^3+b^3=-4,\ \ a^3b^3=-1$$

よって，$a^3=-2-\sqrt{5},\ b^3=-2+\sqrt{5}$ ，すなわち，$a=-\sqrt[3]{2+\sqrt{5}},\ b=-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ としてよく，(a) から $x^3+3x-4=0$ の実数解は $x=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ のみである．

「こんなこと，思いつきません！」
「当たり前だ．こんなのは思いつくはずがない．これは，鑑賞用だ．」
「数学を鑑賞するのですか．」

数学は，何千年という歴史と，数知れない多くの数学者によって創られてきたものです．ちょっと考えただけで思いつくものなんて，ほとんどありません．

とくに，受験生には

1. 自由に計算したり証明したりできなければならないもの．
2. 重要な定理の証明など，学んでいくべきもの．
3. 知っている必要はないけれど「へえーっ，すごいなあ」と感動したり驚いたり，という観賞に値するもの．

があるように思います．

入試問題は様々な背景をもつものが少なくありません．そうしたもののうち，数学の基本的な命題の証明などは身につけなければなりません．つまり，先哲の知恵をありがたく受け取るのです．

昨今の世間の風潮では，数学は自分で考えることばかり強調されている気がします．しかし，学ぶことはとても大切です．学んで初めて考えることもできるようになるのですね．

さらに，『鑑賞用の』テーマもあります．数学の修行中の二十歳前後の若者には，とても手に負えず，もう少し先にあるかなという感じですね．ちょうど，美術館に行き，絵画を鑑賞するのと似ています．とても創出することは出来そうにない芸術作品を鑑賞する，それが芸術の心を養っていきます．

とても自分にはできそうにない，などと落胆してはつまらないことになります．数学においても，へーえ，すごいなあ，面白いなあ，難しいなあ，などと鑑賞してみるのは，やがて数学の心を養っていくことになりますね．

受験生にとって，数学は，出来ることより楽しむことの方が，やがていい結果となって現れるような気がします．これは，数学や芸術に限りませんよね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**