バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第５７回　複素数平面はなぜ難しい？

複素数平面は生徒にとって，とても難しく感じるようです．それも無理はありません．それまでは「２乗すれば正か０」と信じてきたわけですから，突然に，「２乗したら－１となる数を考えて…」…「考えられません!!」というのも当然です．

i は≪虚（！？）数≫，「これって，実在（難しい言葉ですね）するの？？信じられなーい．」
また，i を文字と同じように計算すればいいと言われても，それまでの文字は≪実数≫ですが i は≪虚数≫，

「実数の掛け算はよくわかってるけど，$2i$ は実数同士のかけ算と同じなの？違うの？」
「同じはずない!!!　実数同士の掛け算は，$2\cdot 3=6$ と計算できるけど $2i$ はもうこれ以上計算できない!!!???」
疑問は次々と湧いてきます．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

複素数は複数の側面を持っています．これが，生徒たちにとっての「複素数平面の難しさ」につながってきます．「２乗することにより i は－１になる数」と考えていたら，突然，「複素数は平面上の点と対応する」ということになり，あれっと思うまもなく，「複素数は回転を表す」ということになり，その間にも，$x+yi$ という表現に加え $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ という表現もあったり，…これらがごちゃごちゃになっていれば，混乱の極みでしょうね．これらの内容は実数にはない概念です．

「複素数は，いくつもの側面をもつ」ということに気づく

ことが，重要です．次の３つの側面に注目してみましょう．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（１）まずは数としての側面です．さまざまな計算や，多項式方程式，とくに，円分方程式などの解法において，加減乗除，有理化，共役複素数など，複素数の計算ルールの習得が不可欠です．

（２）そして複素数平面上の点を表します．このときは，$x+yi$ だけでなく，$r(\cos\theta+i\sin\theta)$ のような表現も用います．さらに，複素数の足し算，引き算はベクトルの役割もありますね．ここでは，偏角の計算

$$\arg z_1z_2=\arg z_1+\arg z_2,\qquad \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2$$
$$\arg z^n=n\arg z$$

などの習得が不可欠です．さらに，図形的な考察からも

$$\arg\overline{z}=-\arg z,\qquad \arg\frac{1}{z}=-\arg z$$
$$\arg(-z)=\arg z+\pi$$

などが自由に扱えないといけません．

バックナンバーはこちら

（３）最後に，複素数平面上の回転を表す複素数と対称移動の道具です．　$\cos\theta + i\sin\theta$ は θ 回転を表します．z が与えられたとき，$\bar{z}$ は実軸に関する対称移動した点を表します．ちょっと高級な反転などにもつながりますね．

この３つの側面が，入れ代わり立ち代わり，登場するのです．今，どの側面を考えているのか，つねに意識しながら考えていきますね．

（例）複素数平面上の3点 $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ は，正三角形の3頂点となっているとき，

$$\gamma - \alpha = (\beta - \alpha)\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}\quad\text{（複号同順）}$$

つまり，$\overline{\mathrm{AB}}$ を $\pm\dfrac{\pi}{3}$ 回転して $\overline{\mathrm{AC}}$ を得るということです．ここで，すでに上の３つの側面のうち（２），（３）が登場しました，具体的な計算が伴うなら，（１）ですね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**