バックナンバーはこちら

第５１回　2014年の大学入試は？(2)

今年の私立大学の入試問題は無理のない出題だなあ，という印象の大学が多くなったような気がします．

早稲田大学の理工学部は，最近は少し軽量化しているようです．［5］にポンスレーの閉形定理をもとにした問題が出ているのが目を引きます．放物線 C_1 上の 3 点 O，A，B を頂点とする三角形が円 C_2 に外接するとき，放物線上の任意の点 P から引いた円 C_2 の 2 本の接線と放物線 C_1 の交点を Q，R とすると，直線 QR も円 C_2 に接します．任意の点ですよ！面白い性質ですね．これを点と直線の距離の公式を用いて示すものです．［4］は計算は面倒ですが，場合分けの練習にはいいかもしれません．他はどこかで見たような問題でした．

慶応義塾大学理工学部は昨年までの格調が薄くなり，［1］は小問集合となりました．［5］にアステロイドが登場しますがこれも入試ではご常連さんですね．

慶応義塾大学医学部も昨年より軽くなった感じがします．とはいえ十分質量ともあるのですが．[2]の確率の問題では数直線上の座標 1, 2, 3 の位置におかれた点について次の操作 T が定義されます．

(a)　点が 1 または 2 の位置に置かれている場合は確率 $\frac{3}{4}$ でそのままにしておき，確率 $\frac{1}{4}$ で正の方向へ 1 だけ動かす．

(b)　点が 3 の位置に置かれている場合は確率 $\frac{3}{4}$ でそのままにしておき，確率 $\frac{1}{4}$ で負の方向へ1だけ動かす．

とても複雑な操作かなと思いきや，ひとたび 2 に位置すると，後は，2 と 3 の間を行ったり来たりする（か，じっとしているか）しかありません．

同志社大学の（全学部日程）理系［4］ではいわゆる平行曲線が出題されました．幅が一定の距離の2曲線です．この面積の計算で，積分

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\sin^2\theta+3\sin\theta+\frac{1}{\sin\theta}+\frac{3}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}\right)d\theta$$

の計算をしなければなりません．初めの3項はよいとして，後の2項は，受験生には厳しいかなと思います．これだけ取り出してみると

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(3-\frac{1}{\sin^2\theta}\right)\frac{1}{\sin^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\{3-(1+\cot^2\theta)\}\{-(\cot\theta)'\}d\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(2-\cot^2\theta)(\cot\theta)'d\theta=-\left[2\cot\theta-\frac{\cot^3\theta}{3}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

ここで，$\cot\theta$ を用いて計算をすすめました．今は高校の課程に $\cot\theta$ はありません．

そこで，$\frac{1}{\sin^2\theta}$ は見慣れないでしょうが，$\frac{1}{\cos^2\theta}$ なら見慣れています．$\frac{\pi}{2}-\theta=t$ とおくと

バックナンバーはこちら

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{3}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin^4\theta}\right)d\theta=\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\left(\frac{3}{\cos^2 t}-\frac{1}{\cos^4 t}\right)(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(3-\frac{1}{\cos^2 t}\right)\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2-\tan^2 t)(\tan t)'dt=\left[2\tan t-\frac{\tan^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

これなら，受験生も馴染むでしょうね．

もうひとつ，これもむずかしい？

$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=\dfrac{2\pi}{3}$ とする．

$$\frac{\sin y+\cos y}{\sin x+\cos x}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

を満たすとき，$x=\boxed{}\pi$，$y=\boxed{}\pi$ である．

2014　摂南大・理工

答は，次回に．

では，前回に引き続き，「勝手に！第 11 回大学入試問題検定！！」です．

初級問題

今年の入試問題です．まあ読んでみてください．

2 個以上の正の整数を要素とする有限集合を A とする．

Aのどの 2 数も一方が他方を割り切るときAは良い集合であるといい，Aのどの 2 数も互いに他を割り切らないときAは悪い集合であるという．

また，A の良い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち

$$\max\{\,n(B)\mid B\subset A,\ n(B)\geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は良い集合}\}$$

を A の最良数と定義し，A の悪い部分集合の要素の個数の最大値，すなわち

$$\max\{\,n(B)\mid B\subset A,\ n(B)\geqq 2 \text{ かつ } B \text{ は悪い集合}\}$$

を A の最悪数と定義する．

（まだまだ続くのでこのあたりで，以下略...）

良い集合とか最良数といわれるのはいいでしょうが，定義とはいえ，悪い集合とか最悪数とか言われる集合や数は，いい気分はしない ?! かな ??!!，と思わず考えてしまうようなこの問題，ずばり，どこの大学の何学部の出題でしょうか．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**