バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第４８回　解と係数の関係は使えるのですか？

「先生，簡単なこと聞いていいですか？」

「簡単なことなら聞かなくてもいいのじゃあないか.」

「でも自信がないのです．この問題なのですが.」

２次方程式

$$x^2+(1-\sqrt{2})x+1=0$$

の 2 つの解を α，β とするとき，$\alpha^3+\beta^3$ の値は次のどれか.

a. $-4+2\sqrt{2}$　b. $4-2\sqrt{2}$　c. $4+2\sqrt{2}$　d. $-7+5\sqrt{2}$　e. $7-5\sqrt{2}$　f. $7+5\sqrt{2}$　g. 以上のどれでもない.

（2013　防衛大学校）

「で？」

「

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$$

と変形して，解と係数の関係から得られる

$$\alpha+\beta=\sqrt{2}-1,\quad \alpha\beta=1$$

を代入しました．答は a. となりました.」

「で，何が問題なのかな？」

「解と係数の関係を使っていいのですか．これが心配で，心配で.... この２次方程式の解は，虚数になるのです.」

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

「以前，２次方程式の解を求める問題

方程式

$$x^2-2x+1-i=0$$

の解を求めよ.

に解の公式を使って，

$$x=1\pm\sqrt{i}$$

とすると，駄目だと言われました．それ以来，虚数になるときに使っていいのかどうか心配になるのです...」

「それがトラウマになっているのだな．僕はその解は駄目だとは思わないが，なぜ駄目だと言われたのかな.」

「ええっと，それは，ルートの中に虚数が入っているからですか？」

バックナンバーはこちら

「君たちはルートの中は実数と約束していたよね．」

「そういえば学校ではルートの中は正か 0 か負かのいずれかのときしか習っていません．$x=1\pm\sqrt{i}$ はルートの中に虚数が入っているので定義されないということですね．」

「もちろん，$\sqrt{i}$ は 2 乗して i になる複素数として定義すればいいのだが，これだけでは一つに定まらずそこには少し面倒なことがある．だから高校では $x=1\pm\sqrt{i}$ とはしないということだ．

$x=1\pm\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}=\dfrac{2\pm\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$ なら，納得できるよね．」

「解と係数の関係の話に戻ろう．2 次方程式

$$x^2+(1-\sqrt{2})x+1=0$$

の 2 つの解を α，β とするとき，

$$x^2+(1-\sqrt{2})x+1=(x-\alpha)(x-\beta)$$

が成り立つ．」

「わかりました．α，β が実数か虚数かに関わらず

$$\alpha+\beta=\sqrt{2}-1,\quad \alpha\beta=1$$

は確かに成り立ちます．心配する前に，証明して確かめればすぐに解決することでした．すみません．」

解の公式を学ぶときには，まだ，虚数のことを学んでいません．したがって，生徒諸君が解の公式をはじめて学ぶときに係数が実数ということをとくに意識しないのも無理はありません．解と係数の関係は複素数の範囲で成り立つことを学んでいるはずなのですが，そのあたりもあまり意識せず，曖昧なままの生徒も少なくありません．

数の範囲を実数から複素数に広げたときに，複素数の範囲で，それまで学んできた実数に関するさまざまな定義や性質がそのまま，複素数の範囲で成り立つかどうか，確かめれば使っていいのかどうかわかるはずですね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**