バックナンバーはこちら

第47回　「一般性を失わない」の「一般」って？

「先生，この問題ですが

[問題1]

楕円 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点 $(p,\ q)$ におけるこの楕円の接線が x 軸，y 軸により切り取られる線分の長さの最小値を求めよ．ただし，$pq \neq 0$ とする．

[問題1] で『$p>0$，$q>0$ として一般性を失わない』というのでいいのですか．」

「この楕円は，x 軸，y 軸について対称だから，$p>0$，$q>0$ としても一般性を失わないね．」

「先生，一般って何なのですか？」

「この問題は，接点が4つの象限のそれぞれにある場合に分けて考えることができるが，同じような議論を4回も繰り返すことになるので，$p>0$，$q>0$ の場合を考えればその他の場合についても考えたことにしてもいいよね，ということだ．つまり，このように $p>0$，$q>0$ の場合のみを考えることが，すべての場合を考えたことと同じになるとき，≪一般性を失わない≫というのだね．」

「先生，別の問題で，一般性を考えたのです．でも，それではだめだといわれました．」

[問題2]

次の方程式を満たす三つの自然数 x，y，z を求めよ．

$$\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x}=3$$

「どのように≪一般性≫を考えたのかな．」

「$x \leq y \leq z$ として一般性を失わない，と考えました．」

「それではだめだな．」

「でも，他のとき，例えば，$y \leq x \leq z$ のときでも同様です．x と y を入れ替えればいいだけです．そうすると，与えられた方程式も

$$\frac{1}{y^2x}+\frac{1}{x^2z}+\frac{1}{z^2y}=3$$

つまり，

$$\frac{1}{x^2z}+\frac{1}{y^2x}+\frac{1}{z^2y}=3$$

バックナンバーはこちら

になって，一般性を失わない….」

「ほんとにそうかな.」

「ええっと，アレッ，ちょっと違うようです.

$$\frac{1}{x^2y}+\frac{1}{y^2z}+\frac{1}{z^2x}=3 \quad と \quad \frac{1}{x^2z}+\frac{1}{y^2x}+\frac{1}{z^2y}=3$$

は似ているようですが違います．わかりました．これでは，同じことになっていませんから，一般性は失われるってことですね.」

数学には魔法のような（？）言葉があってそれを用いると状況が単純化されることがありますが，本当に内容が分からないと使ってはいけないのですね.

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**