バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第４５回　指数法則は成り立たない？？

「先生，変なんです．ωを 1 の虚数の 3 乗根の一つとするとき，自然数 n について

$\omega^{2n}+\omega^n+1$ の値を求める

問題ですが.」

「おお，よく見かける話だが，何が変なのかな.」

「$\omega^3=1$ を用いて，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=(\omega^3)^{\frac{2n}{3}}+(\omega^3)^{\frac{n}{3}}+1=1^{\frac{2n}{3}}+1^{\frac{n}{3}}+1=3$$

と計算したのですが，どう考えても変なんです.」

「それで？」

「この計算だと，$n=1$ のとき，

$$\omega^2+\omega+1=3$$

となるはずですが，$x^3=1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x+1)=0$ から

$$\omega^2+\omega+1=0$$

となるのです．なぜ，違う結果なのですか？」

「君の出した計算の結果は，君自身が責任をもって考えるのが筋じゃあないか.」

「すみません．その通りですが，どこが誤っているのかわからないのです.」

…………………………

「君の計算の，

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=(\omega^3)^{\frac{2n}{3}}+(\omega^3)^{\frac{n}{3}}+1 \quad \cdots(\dagger)$$

のあたりが，怪しいね.」

「でも先生，指数法則の 1 つは

$$a^{xy}=(a^x)^y,\ \ (a^x)^y=a^{xy}$$

ですから，いいんじゃあないですか．複素数 ω に対して

$$\omega^{2\cdot3}=\omega^6=\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega\cdot\omega=(\omega\cdot\omega)(\omega\cdot\omega)(\omega\cdot\omega)=(\omega^2)^3$$

は成り立つのではありませんか.」

「ちょっと待った！　それは，どんなときに成り立つのかな.」

「ええっ，いつも成り立つのではないのですか.」

…………………………

バックナンバーはこちら

「確かに

（ｉ） 数 a と任意の正の整数 m，n に対し，　$a^{mn}=(a^m)^n$，$(a^m)^n=a^{mn}$

は成り立つ．ただし，正の整数 m，n であることに注意しておこう．」

「m，n が正の整数でなければいけないのですか？　正の整数でないときはどうなるのですか？？」

「例えば，2 乗したら 3 になる正の数 $3^{\frac{1}{2}}$ はただ 1 つ存在するが，2 乗したら-3 になる数は実数の範囲にはなく複素数の範囲となるので，普通は a が負の範囲では $a^{\frac{1}{2}}$ などは考えない．

（ⅱ） 正の数 a と任意の実数 x，y に対し，　$a^{xy}=(a^x)^y$，$(a^x)^y=a^{xy}$

これは指数法則の 1 つだね．」

「どうやら，僕は，この二つを混同して，(†) の式では

数 a と実数 x，y に対し，$a^{xy}=(a^x)^y$，$(a^x)^y=a^{xy}$（誤り！）

と誤って計算したみたいです．」

「$\omega^3=1$，$\omega^2+\omega+1=0$ を用いれば容易に

$$\omega^{2n}+\omega^n+1=\begin{cases}3 & (n=3k)\\ 0 & (n=3k-1,\ 3k-2)\end{cases}$$
$$(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

を得ることができるはずだ．」

「はい，頑張ります．」

• •

小学生でもわかるような (ｉ) からはじめて，実数の範囲に限ることにより (ⅱ) に至り，さらには指数関数の定義

$a>0$ のとき，実数 x に対して指数関数 $y=a^x$ が定義される

にも関わるという流れの中で理解してほしいですね．

学校法人河合塾　開発研究職　数学科講師　**大竹真一**