

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第42回 不等号の使い分け

「先生、どうしても納得がいかないんです。この問題を見てください。」

(例1) 不等式 $x^2+2x-15<0$ を解け. (答) $-5<x<3$.(例2) 不等式 $x^2+2x-15\leq 0$ を解け. (答) $-5\leq x\leq 3$.

「そして、...」

(例3) 実数 x, y が $0<a<x<y<b$, $x+y=a+b$ を満たすとき, $xy\geq ab$ を示せ.(答) $a<x<b$ から

$$xy - ab = x(a+b-x) - ab = -(x-a)(x-b) > 0$$

よって $xy > ab$ したがって $xy \geq ab$ 「確かに、 $xy > ab$ なら $xy \geq ab$ を満たすのは分かりますが、(例1) で (答) $-5 \leq x \leq 3$. とするとなぜ、 \times なのですか？」

.....

確かに生徒諸君にしてみれば、(例1) と (例2) では答の不等号にイコールが入るか入らないかは、 \bigcirc か \times かの境目で、とても気がかりです。しかし(例3)の場合に、不等式 $a \leq b$ は

$$a < b \text{ または } a = b$$

という意味だから、

$$xy > ab \text{ なら } xy \geq ab$$

は成り立つ、と言われても、(例1)、(例2)と(例3)の微妙な違いは納得いかないほうが自然ですよ。

ここでの(例3)の不等式と(例1)、(例2)での不等式とは意味が違うのですが、多くの生徒はよく分かっていないようです。

.....

元来、大小関係を表す不等式も、ときとして値の大小の範囲を示すことがあります。(例3)は単に xy と ab の大小関係を考えているに過ぎません。しかし、(例1)、(例2)では x の値の範囲を示しているのです。この例では「不等式を満たすような x の値の範囲を求めよ」というのが出題者からの要求なのです。(例1)は、不等式を満たす x の値の範囲は

$$\{x \mid -5 < x < 3\}$$

もちろん(例2)は、不等式を満たす x の値の範囲は

$$\{x \mid -5 \leq x \leq 3\}$$

ですから、これらの答のイコールは勝手に入れたり取ったりはできません。

.....

(例1), (例2) のように, 集合を表すための不等号と (例3) のように大小関係を表す不等号と, 同じ記号を使って表すのですから, 生徒諸君が混乱するのも当然ですよ.



では「勝手に！第9回大学入試問題検定！！」今回は, 初級問題です.

初級問題

今年の大学入試で, ある大学の文系には

xy 平面において, 点 (x_0, y_0) と直線 $ax+by+c=0$ の距離は $\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である.
これを証明せよ.

理系には

三角関数の極限に関する公式 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ を示すことにより, $\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ.

という, 基本中の基本を出題した大学があります. とはいえ, できなかった受験生も少なくありません. この大学を次の中から選んでください.

(選択肢) ①北海道大学 ②東北大学 ③名古屋大学 ④大阪大学 ⑤九州大学



では, 前回の, 中級問題の解答です.

1988年東京大学・理類の出題でした. 問題文は次の通りです.

空間内に平面 α がある. 一辺の長さ 1 の正四面体 V の α 上への正射影の面積を S とし, V がいろいろと位置を変えるとときの S の最大値と最小値を求めよ.

ただし, 空間の点 P を通って α に垂直な直線が α と交わる点を P の α 上への正射影といい, 空間図形 V の各点の α 上への正射影全体のつくる α 上の図形を V の α 上への正射影という.

(1988 東京大学・理類)