バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

# 先生方のための徹底入試対策講座

## 第136回　極座標の計算が合いません？

「先生，計算が合わないのです．」
「まあ，計算ミスかデタラメな式をつくったか，どちらかだな．」
「計算ミスはありません！式もあっていると思うのですが，…」

座標平面上の原点Oと楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上の2点 $P_1$，$P_2$について，線分 $OP_1$ と線分 $OP_2$ とが互いに直交する位置にあるとする．線分 $OP_1$ および線分 $OP_2$ の長さをそれぞれ $r_1$，$r_2$ とするとき，$\dfrac{1}{r_1{}^2}+\dfrac{1}{r_2{}^2}$ の値は定数となることを示せ．

（2011　九州大）

「この問題です．何度計算しても，計算結果は定数にならないのです．僕のノートです．」

楕円上の点 $P_1\ (a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ をと表すと $OP_1 \perp OP_2$ から $P_2\left(a\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right),\ b\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$ すなわち $P_2$

$(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ と表され，

$$r_1{}^2=a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta\ ,\quad r_2{}^2=a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta$$

よって

$$\begin{aligned}\frac{1}{r_1{}^2}+\frac{1}{r_2{}^2}&=\frac{1}{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}+\frac{1}{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\\&=\frac{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)+(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}\\&=\frac{a^2+b^2}{(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta)(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)}\\&=\cdots\cdots???\end{aligned}$$

「先生，結果は定数になりません．」
「$OP_1\perp OP_2$ になっているかな？」
「それはもちろん，内積を求めると

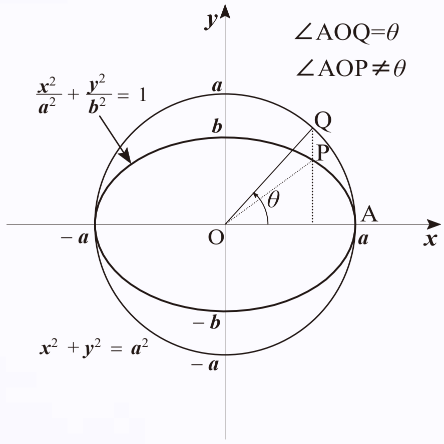
$$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}=a\cos\theta\cdot(-a\sin\theta)+b\sin\theta\cdot b\cos\theta=(b^2-a^2)\sin\theta\cos\theta$$

あれっ！定数になりません！$P_1$の偏角は$P_2$だから $\theta+\dfrac{\pi}{2}$ の偏角を としたのに，…」

「$\theta$ は偏角ではない．」
「でも，$r_1$，$r_2$ を $\theta$ を用いて表した極座標だから偏角ではないのですか？」
「楕円上の点$P_1$ $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ の $\theta$ は媒介変数に過ぎず，偏角ではない．
点 Pの極座標$(r,\ \theta)$ では，Oを原点として，$r$=OP，$\theta$＝(始線から半直線 OPへ左回りに測った角)
だから，君の解答，いや，君の誤答の $\theta$ とは意味が違うのだな．」

バックナンバーはこちら

「先生，このような図を思い出しました．
この図で $\theta$ は∠AOQであって，
　点Pの偏角ではない，ということですね．」
「その通りだ．」
「この問題は $P_1(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおくのは
あまり意味がないのですね．」
「そのようにおいても出来なくもないが，
$\theta$ が活躍する余地はないので，
きれいな置き方とは言えないように思うね．」
「では，先生，上手い置き方はやはり極座標でおくことですか．」
「まず，この問題を極座標で考えてみよう．」




$P_1$ の偏角を $\theta$ とすると $P_1(r_1\cos\theta,\ r_1\sin\theta)$，また，$OP_1 \perp OP_2$ から $P_2$ の偏角は $\theta \pm \frac{\pi}{2}$ となるので，
$P_2\left(r_2\cos\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right),\ r_2\sin\left(\theta\pm\frac{\pi}{2}\right)\right)$ すなわち $P_2(\mp r_2\sin\theta,\ \pm r_2\cos\theta)$ と表される．
$P_1$，$P_2$，いずれも楕円上にあり，

$$\frac{(r_1\cos\theta)^2}{a^2}+\frac{(r_1\sin\theta)^2}{b^2}=1,\quad \frac{(\mp r_2\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(\pm r_2\cos\theta)^2}{b^2}=1$$

よって

$$\frac{1}{r_1^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2},\quad \frac{1}{r_2^2}=\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}$$

辺々加えて

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\quad (\text{定数})$$

「$\theta$ が偏角である媒介変数表示が極表示ということですね．」
「何でもかんでも，$\theta$ があればいいというものじゃあない，ということだ．」
「では，極方程式は $\frac{1}{r^2}=\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}$ ということですか．でも，このような式でなくて…」
「君が言うのは $r=\frac{b^2}{a-c\cos\theta}$ $(c=\sqrt{a^2-b^2})$ かな．これは焦点の一つ $(-c,\ 0)$ すなわち $(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ を原点としこの焦点から $x$ 軸の正の向きに向かう半直線を始線とするときの極方程式だな．原点などをどう定めるかで，もちろん，方程式の形は変わるよね．」

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**