バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

# 先生方のための徹底入試対策講座

## 第135回　複素数平面上の図形は $z=x+yi$ で？

複素数平面上の図形は，出来れば の式のままで考えてみたいですね．例えば

$$|z-\alpha|=r \quad (r\text{ は正の実数})$$

なら，$z=x+yi$を用いて $x$，$y$ についての，直交座標の方程式の直さずに中心 $\alpha$，半径 $r$ の円ですね．

でも直線に関しては，受験生の多くがわからないようです．教科書に，円以外のこうした表現を余り見かけないので，やむを得ない？？？．

• • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • • •

受験参考書の一部には，直線の方程式として，

$$\overline{\alpha}z+\alpha\overline{z}+c=0 \quad (c\text{ は実数})$$

が挙げられていますが，これを丸暗記するのは余りに無駄が多いですね．

$$z=z_0+t\alpha \quad (t\text{ は実数，}\ \alpha\neq 0) \quad \cdots\cdots \ (1)$$

これは，点 $z_0$ を通り，2点 0，$\alpha$ を通る直線に平行な直線を表します．$\alpha$は方向ベクトルの働きをします．つまり，ベクトルを用いて点$\vec{p_0}$を通り，$\vec{u}$ を方向ベクトルにもつ直線の方程式$\vec{p}=\vec{p_0}+t\vec{u}$ と同じ意味と形ですね．

さらに，この式を変形します．

$$\overline{\alpha}(z-z_0)-\alpha(\overline{z}-\overline{z_0})=0 \quad \cdots\cdots \ (2)$$

$\dfrac{z-z_0}{\alpha}=t$（$\alpha\neq 0$）において，$t$ は実数だから，$t=\overline{t}$ から

$\dfrac{z-z_0}{\alpha}=\overline{\left(\dfrac{z-z_0}{\alpha}\right)}$　すなわち　$\dfrac{z-z_0}{\alpha}=\dfrac{\overline{z}-\overline{z_0}}{\overline{\alpha}}$　よって　$\overline{\alpha}(z-z_0)-\alpha(\overline{z}-\overline{z_0})=0$　ゆえに

$$\overline{\alpha}(z-z_0)-\alpha(\overline{z}-\overline{z_0})=0$$

これも，$z_0$点 を通り，直線$0\alpha$ に平行な直線を表します．$\alpha$ は「方向ベクトル？」ですね．

$$\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+c=0 \quad (c\text{ は0または純虚数}) \cdots\cdots \ (3)$$

これは（2）で $-\overline{\alpha}z_0+\alpha\overline{z_0}=c$ とおいて得られます．直線$0\alpha$に平行な直線を表します．

$$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c'=0 \quad (c'\text{ は実数}) \cdots\cdots \ (4)$$

さらに，（2）を $\pm\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転して（$\alpha$を$-i\alpha$ に代えて）点 $z_0$ を通り，直線 $0\beta$に垂直な直線 $\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c'=0$（$c'$ は実数）を得ます．$\beta$は「法線ベクトル？」ですね．もちろん，通る点 $z_0$ を用いて

バックナンバーはこちら

$$\overline{\beta}(z-z_0)+\beta(\overline{z}-\overline{z_0})=0 \quad \cdots\cdots（5）$$

と変形できます．また，次のように2点$\alpha$，$\beta$を結んでできる線分の垂直2等分線として

$$|z-\alpha|=|z-\beta| \quad \cdots\cdots（6）$$

実はこれは，最もよく使われる直線の方程式です．

2点$\alpha$，$\beta$のそれぞれからの距離が等しい点$z$の軌跡，すなわち，2点$\alpha$，$\beta$を結んでできる線分の垂直2等分線を表しています．この直線は，点$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$を通り，$\beta-\alpha$は「法線ベクトル？」ですね．

この式からも $|z-\alpha|^2=|z-\beta|^2$ すなわち $|z|^2-\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}+|\alpha|^2=|z|^2-\overline{\beta}z-\beta\overline{z}+|\beta|^2$ よって
$(\overline{\beta}-\overline{\alpha})z+(\beta-\alpha)\overline{z}+|\alpha|^2-|\beta|^2=0$
$\beta-\alpha$ を改めて$\beta$，$|\alpha|^2-|\beta|^2$ を改めて$c'$とおくと $\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+c'=0$（$c'$は実数）…（4）が得られます．

このように多くの直線の方程式がつくられます．状況に応じて使い分けるのは，直交座標における数々の形の直線の方程式と同様です．

【蛇足】

少し難しい蛇足ですが，（3），（4）において $\alpha=\alpha_1+\alpha_2 i$，$\beta=\beta_1+\beta_2 i$，$z=x+yi$ として

$\overline{\alpha}z-\alpha\overline{z}=(\alpha_1-\alpha_2 i)(x+yi)-(\alpha_1+\alpha_2 i)(x-yi)=2(\alpha_1 y-\alpha_2 x)i$

…… $|\alpha_1 y-\alpha_2 x|$ は二つのベクトル $(\alpha_1,\ \alpha_2)$，$(x,\ y)$ のつくる平行四辺形の面積

$\overline{\beta}z+\beta\overline{z}=(\beta_1-\beta_2 i)(x+yi)+(\beta_1+\beta_2 i)(x-yi)=2(\beta_1 x+\beta_2 y)$

…… $\beta_1 x+\beta_2 y$ は二つのベクトル $(\beta_1,\ \beta_2)$，$(x,\ y)$ の内積

となっています．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**