バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第134回　増加関数って導関数が正？

高校の教科書に書かれていることでも，受験生が身についていないことは少なくありません．そうしたことが大学入試に出題されることもあります．

1 今年の入試問題から

今年の名古屋大の問題の一部です．

> 関数 $f(x)$ は区間 $x \geqq 0$ において連続な増加関数で $f(0)=1$ を満たすとする。
> ただし $f(x)$ が区間 $x \geqq 0$ における増加関数であるとは，区間内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つときをいう。
> 以下，n は......（以下略）
>
> （2022　名古屋大・理系）（問題の一部）

「増加関数って，$f'(x)>0$ じゃあないの」という受験生の声が聞こえて来そうです．しかしこの問題では，関数 $f(x)$ の微分可能性が与えられていません．一般に，増加関数はこの問題のように定義されます．つまり，

> $f(x)$ がある区間 I における増加関数であるとは，
> 区間 I 内の任意の実数 x_1，x_2 に対し $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つことをいう

となります．もちろん，高校の教科書に書かれています．導関数が定義されていないのですから，$f'(x)>0$ というわけにはいきません．（ここでは高校の教科書に従い狭い意味での増加関数（単調に増加する関数）を考えています．）

この定義から，受験生がよく知っている

> 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続で開区間 $(a,\ b)$ で微分可能であるとき
> 開区間 $(a,\ b)$ で $f'(x)>0$ ならば関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加する

ことも導かれます．

この証明は，教科書にも書かれていますが，平均値の定理の応用例の一つですね．

（証明）

開区間 $(a,\ b)$ で $f'(x)>0$ ならば，$a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ である任意の実数 x_1，x_2 に対して，平均値の定理により

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c), \qquad x_1<c<x_2$$

を満たす c が存在し $f'(c)>0$ となるので，$x_1<x_2$ ならば $f(x_1)<f(x_2)$，すなわち，
関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で増加する．（証明終）

2 $f'(x)>0$ は増加関数であるための十分条件

この点に関しては，受験生の多くが理解していません．高校の教科書が，高校生に抵抗がないように，という配慮からか，微分可能な関数 $f(x)$ について
「$f'(x)>0$ となる区間で単調に増加する」ことは書かれていますが

バックナンバーはこちら

「単調に増加する区間で $f'(x)>0$ とは限らない」

ことは書かれていません．

（例）$f(x)=x^3$ は，区間 $-\infty<x<\infty$ において $f'(x)=3x^2$ ですから，$f'(0)=0$ よって $f'(x)>0$ とはいえませんね．

まあ，$f(x)=x^3$ は連続関数ですから，区間を $-\infty<x<0$ と $0<x<\infty$ で考えれば，それぞれの区間で $f'(x)>0$ であり，よって，区間 $-\infty<x\leqq 0$ と $0\leqq x<\infty$ のそれぞれの区間で単調に増加するので，これらを合わせて，区間 $-\infty<x<\infty$ で単調に増加するとはいえるので，ということで，この十分条件しか書かれていないのかもしれません．

3 名古屋大の問題では，増加関数であることを示したい関数は，微分可能な関数

上にあげた名古屋大の入試問題では，問題に与えられた関数 $f(x)$ は微分可能性が与えられず，一般的な増加関数の定義が述べられていますが，解答を進めていく中で増加関数であることを示したい関数は $F_n(y)=\int_{2+\frac{1}{n}}^{y}\frac{f(x)}{x-2}\,dx$，この積分される関数は連続性が与えられているので導関数は存在し，容易に求められます．

いろいろなことを考えさせる良問ですね．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**