

## 先生方のための徹底入試対策講座

## 第133回 この条件、何ですか？

入試問題には、受験生がよくわからないような条件が与えられていることがあります。

これは、いろいろな理由がありますが、入試問題そのものに問題があるわけではなく、高校教育での数学が、数学的に途上？にあることも一つの原因でしょう。

こうした数学教育のステージの違いは、認識の上でもよく見られ、高校数学に限りません。例えば、「ある数がある...」という文を、高校生が見たら「ある数」とは「複素数の範囲で」考えるでしょうが、小学生が見たら「有理数の範囲で」考えるでしょうし、中学生なら「実数の範囲で」考えるでしょうね。もちろん小学生は有理数という言葉を知らないでしょうが整数と分数と有限小数の集合で数をとらえているのですね。



大学入試の抽象的な関数の積分の問題に、「連続」とか「連続関数」という用語がよく使われています。

(1) 実数  $a, b$  は  $a < b$  をみたし、関数  $f(x), g(x)$  は連続とする。すべての実数  $t$  に対して、

$$\int_a^b (tf(x) + g(x))^2 dx \geq 0$$

であることを用いて、次の不等式が成り立つことを証明せよ。等号が成立する必要十分条件を述べて、それも証明せよ。

$$\left( \int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{(e-1)^2}{e} < \int_1^e \frac{1}{1+\log x} dx$$

上の問題では、

「関数  $f(x), g(x)$  は連続とする。」

と書かれています。この連続性はどこに用いられているの？という質問に、多くの高校生は答えられません。これは、

「関数  $f(x), g(x)$  が積分可能である」

ことが条件として与えられているということにすぎません。連続関数は積分可能であるからです。しかし、高校の数学ではこうした積分可能性に関して考察することは恐らくほとんどないのです。

こうした事態は、高校数学での、「積分の定義」に起因します。

高校では不定積分が微分の逆演算で与えられます。 $F'(x) = f(x)$  となる  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数とすることですね。このように定めるなら、初めから微分可能な関数  $F(x)$  と関数  $f(x)$  が存在していることが前提になり、誰も  $F(x)$  の存在について疑問を持つ余地がないのです。ここは、大学の数学と大きく異なります。大学の数学では、区分求積法により定積分を定義し(リーマン積分)、積分が可能かどうかは重要なテーマです。

入試問題を出題するのは、大学の先生です。問題に抽象的な関数  $f(x)$  の積分に関する条件を与えるとき、積分の可能性を論じないわけにはいかず、積分が可能であるための十分条件「関数  $f(x)$  は連続とする」と書かずにはおられないのでしょうか。

同じ大学の別の問題では、「 $f(x)$  は微分可能な関数とする」と書かれています。

Ⅲ  $f(x)$  は微分可能な関数とする.

(1) 次の等式が成り立つ定数  $A$  を求めよ.

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = A \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$$

(2) 定積分  $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{8 + \sin^2 x} dx$  を計算せよ.

(3) 次の等式を示せ. ただし,  $C$  は積分定数とする.

$$\int e^x(f(x)+f'(x))dx = e^x f(x)+C$$

(4) 定積分  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^x \frac{\sqrt{1+\sin 2x}}{1+\cos 2x} dx$  を計算せよ.

$f(x)$  が微分可能なら  $f(x)$  は連続だから, これでいいのですが, 積分だけでなく導関数  $f'(x)$  も問題文中にあるので, これらをまとめてこのように表現されているのでしょうか.



受験生は問題文を読みながら, 「連続」という文字を気楽に(?) 読み飛ばしていることが多いと思います. 受験生は「連続」と書かれる理由も, 必要性も, 感じていないからです. この条件の意味も知らないことが多いでしょう. でも試験場で「アレッ, この連続の条件はどう使うのだろう」と考え込んでしまう生徒がいたら大変ですので, 生徒には伝えておきたいですね.



「勝手に! 第12回大学入試問題検定!!」前回の答えは 京都府立医科大学 でした.

学校法人河合塾 数学科講師 大竹真一