

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第132回 ロピタルの定理を使ってもいいですか？

毎年のように、この時期には表題のような質問がよくあります。

「先生、ロピタルの定理を使ってもいいですか？」

「で、君はその定理を証明できるの？」

「……………」

「自分で証明できないなら、その証明を使ってはいけないよね。第一、正しいかどうかも分からないしねえ。」

「でも、教科書のコラムに書いてありました。だから正しいと思います。」

「正しいの根拠は、数学的ではないなあ。君は納得しているのかな。」

……………

自分で証明できないような定理を使ってはいけないという理由はたくさんあります。

1 証明もできないのに使うのは数学を学ぼうとしている者の態度ではないですよ。数学は、論理が一番大切だから、ですね。

2 様々な定理がありますが、その証明はいつでも使えるとは限らず、ある条件下でしか使えないこともよくあります。証明が理解できていればその理由もおのずからわかり、定理公式の誤用は避けられます。

3 定理の証明の中には、数学の基本的なアイデアがいっぱい含まれているので、そのアイデアも含めて身につけていようと思いたいですね。そしてそれがわかるまでは、使うに使えるということも少なくありません。

……………

でも、これらには反論が……………

● 平均値の定理の証明は、かつては高校の教科書にもロルの定理を用いて証明されていました。しかし、今の教科書では、グラフを描いてかなり直感的な説明しかしていませんが、……………

—— 教科書の説明でも、納得出来たら、今はそれでいいとしましょう。生徒自身が心底納得していることが重要です。

● 自然対数の底 e は、極限を用いて定義されそれらは、収束することが知られている、ということになっていますが、……………

—— 単調で有界だから極限值は存在して、…………… とやると、それにもさらに証明が…………… 少し心苦しいのですが、生徒の学んでいる段階に応じてどこかあるところまでしか生徒には示されないことも少なくありません。（生徒は発展途上ですから（もちろん我々も））このときには生徒にその事情（数学的な事情）を伝えておくことが大切です。

学んでいくうえでどの段階にいるのかによって、(数学的な) 厳密さも、弾力的に考えるということとです。

そうしたことも含めて考えて、上の①, ②, ③の理由から、自分で証明できないような定理を使っ
てはいけないのですね。

.....

では、恒例の「勝手に！第12回大学入試問題検定！！」です。

上級問題

共通試験の問題文のご常連、花子さん、太郎さんは共通試験の壁をすり抜けてついに!! 国公立大学の2次試験にまで登場しました。

n, m は自然数とする。赤玉と白玉の入った n 個の箱があり、次の条件 (a), (b), (c) を満たすとする。

—— 条件 (a), (b), (c) は省略 ——

以下の試行 T を行う。

T : 太郎さんは n 個の箱からひとつの箱を無作為に選び花子さんに渡す。花子さんは渡された箱の中から「無作為に玉をひとつ取り出し、色を確認し同じ箱にもどす作業」を $m+2$ 回繰り返す。

—— 以下省略 ——

これを出題した大学はどこ大学でしょうか。ズバリ教えてください。今回はノーヒントです。ちょっと難しいかな...

.....

前回の答えは 東京大学 (文科) でした。