

先生方のための徹底入試対策講座

第13回 定義が曖昧？

前々回に、偽の命題の話の流れで、つい不用意に、遊び半分(全部?)で「もしイヌがネコだったら、はどうでしょうか?あり得ない?」という宿題(?)を出してしまいました。いろいろな方から答えをお教えいただきました。大きく二つの群に分かれました。

(答え1)「イヌ」という名前の猫、イヌの名前が「猫」。

(答え2)居ぬが猫、往ぬが猫、寝ぬが猫。

(へえーっ、寝入ることを「寝ぬ^{いぬ}」って言うんですねえ。)

で、このように、「イヌ」というのが固有名詞であったり、普通名詞であったり、動詞+助動詞であったり、解釈されるのは、宿題の文の「イヌ」という言葉が実は定義されていないからですね。日常のクイズはこの手のあいまいさが売り物ですが、数学はそうはいきません。

「先生、置換積分と部分積分はどうやって見分けるのですか？」

「置換積分といわれると積分できますが、いわれないとわかりません。」

生徒から、よく聞く言葉ですよ。多くの先生は聞き覚えのある質問じゃあないかと思います。

このようなとき、私は逆に聞き返すことにしています。

「置換積分って、何かな？」

「ええっと、たとえば、積分される式に $\log x$ があるときは $\log x = t$ とおくんです。」

「僕はたとえを聞いているわけではないよ。で、置換積分の公式はどんな形だったかな。」

「ええっと、・・・」

.....

定義や定理・公式は数学ではとても大切なものです。これらは基本となる共通言語みたいなものですから、確実に身につけておかなければなりません。

たとえば、積分についての生徒の状況は、どうでしょうか。部分積分の公式はよく覚えているのですが、

置換積分の公式を覚えていない生徒がほとんどです。これじゃあ置換積分を使うかどうか判断できないのも無理ありません。

置換積分の公式は

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt \quad (g(x)=t)$$

あるいは、この両辺を入れ替えた式でしたよね。

これが身につけている人は、同じような形のふたつの積分

$$\int \frac{\log x}{x} dx, \quad \int x \log x dx$$

について、迷うことなく

$$\left[\int \frac{\log x}{x} dx \text{ は置換積分を利用したい。} \right.$$

$$\left. \int x \log x dx \text{ は置換積分を利用出来ない} \right]$$

と思うことでしょうか。

なぜなら $\int \frac{\log x}{x} dx$ について、 $\log x$ を $g(x)$ とみれば、 $\frac{1}{x}$ は $g'(x)$ 。

公式どおりの形ですね。



ばくちのように、あれこれやってみて偶然うまくいくようなものはないかと探したり、「～は～とおけ」式の断片知識の鵜呑みしたものを当てはめるといふ、もっとも数学から遠い問題解決の方法では、数学はできるようになりません。

定義、定理・公式、これらを確実なものにしておくと、つまらない解法パターンやばくちはいらな

いですよ。