バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

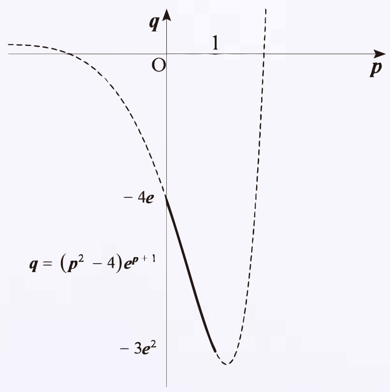
第123回　増加関数の積は増加関数？

今回のテーマは、初学者が誤りやすい大小に関する論理的な誤りの例について考えてみます。まず、今年の筑波大の入試問題です。

> p, qを定数とし，$0<p<1$とする。
>
> 曲線 C_1：$y=px^{\frac{1}{p}}\ (x>0)$ と，
>
> 曲線 C_2：$y=\log x+q\ \ (x>0)$
>
> が，ある1点(a, b)において同じ直線に接するとする。曲線C_1，直線$x=a$，直線$x=e^{-q}$およびx軸で囲まれた図形の面積をS_1とする。また，曲線C_2，直線$x=a$およびx軸で囲まれた図形の面積をS_2とする。
>
> (1) qをpを用いて表せ。
>
> (2) S_1，S_2をpを用いて表せ。
>
> (3) $\dfrac{S_2}{S_1} \geqq \dfrac{3}{4}$ であることを示せ。ただし，$2.5<e<3$を用いてよい。
>
> （2021　筑波大）

初学者が書いたこの問題の解答について、奇妙な？記述がありました。解答は長いので、気がかりな部分だけを取り出します。
(3)の証明で$0<p<1$において$(p^2-4)e^{p+1}+4(p+1)e+3p^2 \geqq 0$を示そうとして、

> $$f(p)=(p^2-4)e^{p+1}+4(p+1)e+3p^2$$
>
> とおくと
>
> p^2-4，e^{p+1}，$4(p+1)e$，$3p^2$はいずれも単調増加
>
> であるから、$f(p)$は$0<p<1$で単調増加。よって、…



この記述のどこが論理的に誤りでしょうか。
確かに、p^2-4，e^{p+1}はいずれも$0<p<1$で単調増加です。
では、その積である$(p^2-4)e^{p+1}$は？
「増加するものの積は増加じゃあないの？」
という初学者の声が聞こえてきそうです。しかし、これは誤りですね。
$q=(p^2-4)e^{p+1}$のグラフは右のようになります。
$0<p<1$では、単調減少ですね。
ここでは、おそらく
二つの関数についていずれも単調増加である区間では、積が単調増加である（誤り）
と直感的に感じるのでしょうね。これは錯覚です。直感というのは常に疑わなければならないのです。

> （誤り）ふたつの関数$g(x)$，$h(x)$がある区間Iでいずれも単調増加であるとき、$g(x)\cdot h(x)$はこの区間で単調増加である

バックナンバーはこちら

この（誤り）は，$g(x)$，$h(x)$が積分可能な関数なら式で表すとなんと！$g'(x)>0$，$h'(x)>0$のとき$\{g(x)\cdot h(x)\}'>0$（誤り！）というとんでもない錯覚ですね。

（事実）ふたつの関数$g(x)$，$h(x)$がある区間Iでいずれも単調増加であるとき、$g(x)\cdot h(x)$はこの区間で単調増加とは限らない

（事実）ふたつの関数$g(x)$，$h(x)$がある区間Iで$g(x)>0$，$h(x)>0$かついずれも単調増加であるとき、$g(x)\cdot h(x)$は単調増加である

$g(x)>0$，$h(x)>0$なら$g'(x)>0$，$h'(x)>0$のとき$\{g(x)\cdot h(x)\}'=g'(x)h(x)+g(x)h'(x)>0$なりますね。

初学者には、

$0<x<1$ で$g(x)=x$，$h(x)=x-2$ はいずれも単調増加、積 $g(x)\cdot h(x)=x(x-2)$ は単調減少

であることを$y=x$，$y=x-2$のグラフと$y=x(x-2)$ のグラフを描いてみることでまず納得！というのがいいでしょうね。

さらに余裕があるようなら、単調増加とは$x_1<x_2$のとき$g(x_1)<g(x_2)$ということなので、

$A<B$，$C<D$のとき$AC<BD$（誤り）

$0<A<B$，$0<C<D$のとき$AC<BD$

などと関連付けて説明すると、よいかもしれませんね。

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**