

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第122回 先生の答え、間違ってますか？

「先生、さっきの問題、先生の答え間違ってますか。」
「え〜っと、どの問題かな。」

.....

生徒のうち、おかしな増減表を書くものが少なからずいました。
話題になっている問題はつぎのものです

次の関数の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ における最大値を求めよ。
 $f(x) = 3\sin x \cos x + 7\sin x + 5$

「で、なにが違うの？」
「僕の結果と合いません。」
「人によって計算結果が違うことはよくあることだ。気にしない方がいい。」
「また先生、面倒なものだからそんなことを言うのですね。」
「そういう訳でもないが、まあ、言いたまえ。」

.....

「ええっと、 $f(x) = 3\sin x \cos x + 7\sin x + 5$ から
 $f'(x) = 3(\cos^2 x - \sin^2 x) + 7\cos x$
 $= 6\cos^2 x + 7\cos x - 3$
 $= (2\cos x + 3)(3\cos x - 1)$

増減表は右のようになり、

$\cos x = \frac{1}{3}$ のとき、最大値12をとる。」

「君の増減表はおかしくはないかな。」
「そうですか？」

「 $\frac{15+16\sqrt{2}}{3}$ は12や5より大きいよね。」

「えっ、先生、どうしてそうなるのですか。」

「君が書いた増減表だから、いや、増減表の様な表だから君に説明責任がある。」

「何か間違ってますか。僕にはよくわかりません。」

「これは単に計算が合わないというレベルのものではない。かなりの重症だな。」

君が書いた表は、《増減表ではない》。

第一、一番上の行は変数 x でないとダメだ。関数 $f(x)$ に関する増減表の変数は x だからだ。」

「……」

「正しい増減表を書いてみよう。」

| | | | | | |
|----------|----|-----|---------------------------|-----|---|
| $\cos x$ | 0 | ... | $\frac{1}{3}$ | ... | 1 |
| $f'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $f(x)$ | 12 | ↘ | $\frac{15+16\sqrt{2}}{3}$ | ↗ | 5 |

$\cos x = \frac{1}{3}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) となる x を α とおくと、

$x = \alpha$ のとき、最大値 $f(\alpha) = \frac{15+16\sqrt{2}}{3}$ を取る。」

| | | | | | |
|---------|---|-----|---------------------------|-----|-----------------|
| x | 0 | ... | α | ... | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(x)$ | | + | 0 | - | |
| $f(x)$ | 5 | ↗ | $\frac{15+16\sqrt{2}}{3}$ | ↘ | 12 |

「分かりましたでも、僕が書いた表では最大値が最小になるのは、不思議です。」

「 $\cos x$ は減少関数だからだね。 x が増加するとき $\cos x$ は減少する。つまり、 x とは向きが逆、逆に進むと、上り坂は下り坂に、下り坂は上り坂になるよね。」

.....

$\cos x = \frac{1}{3}$ のように、の値を求めることが出来ないとき、 $\cos x$ のまま、変数と思うのでしょうか。それなら $\cos x = t$ と置いて、 $f(x)$ を t の関数とみて $g(t)$ と置く、とするならいいのですが。増減表一つでも、学力がわかります。このようなときこそ、絶好のチャンス、

$f(x)$ が x の関数だということ

を生徒に実感してもらいましょう。

当然の基本なのですが、その理解が重要なのですね。

.....

前回の「勝手に！第11回大学入試問題検定！！」の答えは、初めの問題が福岡大学、後の問題が北海学園大学でした。

学校法人河合塾 数学科講師 大竹真一