バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

# 先生方のための徹底入試対策講座

## 第12回　場合分け？したくないよね！

ある試験の答案を分析する会議でのことです．問題は

> $x$ についての方程式 $\left||x-\sqrt{2}|-1\right|=\sqrt{2}$ を解け．

というようなものでした．（問題を簡略化しました．）
答案の分析を進めると驚くべきことが２つありました．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

（その１）
受験者の答案はほぼすべてが，場合分けを活用した（？）次のようなものでした．

（受験者のサンプル答案）

$\left||x-\sqrt{2}|-1\right|=\sqrt{2}$ …①

(i)　$x\geqq\sqrt{2}$ のとき，①は $\left|\left(x-\sqrt{2}\right)-1\right|=\sqrt{2}$ となり，よって

$$|x-1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

（ア）$x\geqq1+\sqrt{2}$ のとき，$x-1-\sqrt{2}=\sqrt{2}$　ゆえに　$x=1+2\sqrt{2}$

（イ）$x<1+\sqrt{2}$ のとき，$-\left(x-1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$　ゆえに　$x=1$

（$x\geqq\sqrt{2}$ を満たさず，不適）

(ii) $x<\sqrt{2}$ のとき，①は $\left|-\left(x-\sqrt{2}\right)-1\right|=\sqrt{2}$ となり，よって

$$|x+1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}$$

（ウ）$x\geqq-1+\sqrt{2}$ のとき，$x+1-\sqrt{2}=\sqrt{2}$　ゆえに　$x=-1+2\sqrt{2}$

（$x<\sqrt{2}$ を満たさず，不適）

（エ）$x<-1+\sqrt{2}$ のとき，$-\left(x+1-\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}$　ゆえに　$x=-1$

したがって

$$\begin{cases} x\geqq1+\sqrt{2} \text{ のとき，} x=1+2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\leqq x<1+\sqrt{2} \text{ のとき，解なし．} \\ -1+\sqrt{2}\leqq x<\sqrt{2} \text{ のとき，解なし．} \\ x<-1+\sqrt{2} \text{ のとき，} x=-1 \end{cases}$$

私はこの問題に関して，「$|x|=a(>0)\Leftrightarrow x=\pm a$」を用いた次のような解法の答案を予想していました．

（私の予想した解法）

$$\left||x-\sqrt{2}|-1\right|=\sqrt{2} \Leftrightarrow |x-\sqrt{2}|-1=\pm\sqrt{2}$$

よって，$|x-\sqrt{2}|=1+\sqrt{2}>0$（適），$|x-\sqrt{2}|=1-\sqrt{2}<0$（不適）

バックナンバーはこちら

さらに

$$\left|x-\sqrt{2}\right|=1+\sqrt{2} \Leftrightarrow x-\sqrt{2}=\pm\left(1+\sqrt{2}\right)$$

したがって，方程式の解は

$$x=1+2\sqrt{2},\ -1$$

高校の教科書も「私の予想した解法」で説明しています．絶対値の本来の意味，すなわち，$|x|$ は「数直線上で $x$ の原点 O からの距離」を表すということからも自然な解法です．

しかし，このような教科書にあるようなシンプルな（そして絶対値の本来の意味からも自然な）解法の答案がなく，ほとんどの答案は申し合わせたように，サンプル答案のような「場合分け」です．

不思議に思っていくつかの受験対策の数学の本を見てわかりました．なんと，その多くに,「絶対値は場合分けせよ」(あるいはそれに類する表現）と枠入りで大きく書かれているのです．元凶（？）はこんなところにあったのですね．もちろん，場合分けしなければどうにもならないときも少なくありません．でもそれは，よく考えた上でのことで，必要があれば場合分けも辞さないということです．何でもかんでも「場合分け」すればよいものではありません．

ホントの元凶は，そうしたことも言われるがままに考えもせず条件反射で解法を選ぶという姿勢の受験生の側にあるのです．といっても受験生にはなかなか大変なことですので，指導する側が常に配慮しておかなければならないことであり，自らも気が引き締まる思いです．

（その２）

サンプル答案の最後を見てください．

$$\begin{cases} x\geq 1+\sqrt{2} \text{ のとき，} x=1+2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\leq x<1+\sqrt{2} \text{ のとき，解なし．} \\ -1+\sqrt{2}\leq x<\sqrt{2} \text{ のとき，解なし．} \\ x<-1+\sqrt{2} \text{ のとき，} x=-1 \end{cases}$$

変ですよねえ．でもこのような答案は少なくないのです．

たとえば,「$x$ についての方程式 $|x-1|=a$ を解け」という問題なら

「 $a\geq 0$ のとき，$x=1\pm a$， $a<0$ のとき解なし」となりますがこのような定数による場合分けと，混乱しているのでしょうか．

「(i) $x\geq\sqrt{2}$ のとき」と「 (ii) $x<\sqrt{2}$ のとき」を場合分けと呼ぶのが混乱の原因かもしれません．

「 $x\geq\sqrt{2}$ の範囲に解をさがしてみると…」と言えば生徒の混乱は少なくなると思いますがいかがなものでしょうか．

学校法人 河合塾　数学科専任講師　**大竹真一**