バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第118回　先生，それは自明です！？

次の問題について，K君が質問に来ました．

> a，bはいずれも正の有理数とする．
> $\sqrt{a}+\sqrt{b}$が有理数ならば，$\sqrt{a}$も$\sqrt{b}$も有理数であることを示せ．

「先生，この証明にその対偶を証明してもいいですか？」
「何をするのも、他の人に迷惑をかけない限り、自由だが…．で，どういうことかな？」
「ええっと、

> $\sqrt{a}$，$\sqrt{b}$の少なくとも一方が無理数ならば，明らかに$\sqrt{a}+\sqrt{b}$も無理数．よって証明された．

これではだめですか」
「どうして『明らか』なのかな？」
「先生，それは自明です．」
「『少なくとも一方が無理数についてその二数の和が無理数』というのを根拠にするなら，明らかに『誤答』だな．つまり，

> p，qの少なくとも一方が無理数ならば，$p+q$も無理数というのは誤り

だね．もちろん、与えられた命題は真ならその対偶も真となるが、この問題の対偶は自明とは言い難いね．」
「ええっと，例えば，無理数と無理数の和は明らかに無理数です．」
「無理数と無理数の和は無理数とは限らない．$\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$は？二つの無理数の和は無理数とならないね．」
「二つの正の無理数なら和は無理数ではないのですか．」
「では，$(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$は？二つの正の無理数の和が有理数の4になった．」
「先生、自明ではないような気がしてきました．」
「明らかという前に，ちょっと証明を考えてみれば、このような誤りをしなくて済むはずだった。」

ちょっと考えて成り立ちそうだと（直感的に？）感じたとき，『自明』で済まそうとする生徒がいます．考えることが面倒なのか，それとも考えることを放棄しているのか，いずれにしても数学からは一番遠い態度ですね．

「では先生、$\sqrt{a}$が有理数で$\sqrt{b}$が無理数なら，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$は無理数！これは自明ですよね．」
「まあこれはいいかもしれないが，その証明はできるかな？」
「自明なことを証明するのですか．」

バックナンバーはこちら

「その理由が説明できなくて『自明』というのは恥ずかしくないのかい．」
「………」
「自分でいつでも容易に証明でき，

心底、明らかだと思うことだけが『自明』

なのだな．≪心底≫だぞ！」

「$\sqrt{a}+\sqrt{b}=q$（qは有理数）とおくと，$\sqrt{a}=\dfrac{q^2+a-b}{2q}$ が導かれ，$\sqrt{a}$は有理数となる．」

「僕が初めに対偶を考えるのは方針としてよくないですね．有理数は、四則演算に閉じているが無理数はそうでないことを考えないと…．」
「初めに，『自明』と逃げないでしっかりと論証しようと思っていたなら、そんなことはすぐにわかったはずだ．」
「これから、しっかりと考えます．」
「数学というものが少しはわかってきたようだね．」

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**