

## 先生方のための徹底入試対策講座

## 第113回 解の個数は？

単に計算問題と考えがちな問題の中にも、色々な論理が潜んでいることがよくあります。受験生はこうした仕組みを見逃しがちですね。そういう意味で次の問題は見た目以上に論理的な難問となるかもしれません。



K君が質問（相談？）に来ました。

「先生、なんか変なんです。」

「どうした？唐突に。何が変かな？」

「この問題で、(1)は点Pの座標を平面 $\alpha$ の式に代入して矛盾を示し、(2)のHの座標は求まりました。で、(3)なんですが...」

「で？」

$s$ を0でない実数とし、 $-5 < t < 7$ とする。Oを原点とするxyz空間内に4点A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(0, 0, 1), P $\left(s, t, \frac{9}{s}\right)$ がある。3点A, B, Cの定める平面を $\alpha$ とする。以下の問いに答えよ。

- (1) Pは $\alpha$ 上にないことを示せ。
- (2) Pから $\alpha$ に垂線PHを下ろす。点Hの座標を $s, t$ を用いて表せ。
- (3)  $q$ を実数とする。点Q(0,  $q, 0$ )とPを通る直線が $\alpha$ と直交するときの $s$ の値をすべて求めよ。

(2020 京都府立大学)

「直線PQが平面 $\alpha$ と直交することから、直線PQの方向ベクトルの一つ $\vec{QP} = \left(s, t - q, \frac{9}{s}\right)$ が平面 $\alpha$ の法線ベクトル $\vec{v} = (1, 1, 1)$ と平行になります。よって、 $s$ についての方程式( $q, t$ は定数)

$$s = t - q = \frac{9}{s} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が得られます。これから、 $s$ の値は2個あって、 $s = \pm 3 \quad \cdots \textcircled{2}$

となったのですが、横で見ていた弟が、『なんとなくだけど、変な気がする。』というのです。」

「それじゃあ、そのセンス抜群の弟に相談してみたら？」

「そんなの僕のプライドが許しません。」

「それでやってきたのか、まあいいだろう。」

ではまず君に質問だが、初めの式 $\textcircled{1}$ には二つのイコールがあるね。つまり二つの方程式だ。未知数は $s$ だけど、 $t, q$ はどこへ行ったのかな？」

「 $s$ の値と関係ないですから。」

「どうして？」

「...」

「 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ は同値ではない。 $\textcircled{1}$ と同値にするには

$$s = \pm 3 \quad \text{かつ} \quad q = t - s$$

としなければならない。」

「結局,

$$q=t-3 \text{ のとき } s=3, \quad q=t+3 \text{ のとき } s=-3$$

それ以外のときは…?」

「もちろん,  $q \neq t \pm 3$  のときは  $s$  は存在しない. 」

「 $t, q$  の関係によって, 直線  $PQ$  が平面  $\alpha$  と直交することがあったり, 直交することがなかったりするのですね.  $q=t-3$  とか  $q=t+3$  とかいうときだけ, うまく直交することができるのか…」

「そういうことだ」

「そうすると, 僕の答え『 $s$  の値は 2 個あって,  $s = \pm 3$ 』というのは誤りなのですね. でも, 存在するなら  $s = \pm 3$  のどちらかということになりますから, 点はもらえませんか?」

「入試の配点や評価というのは, 常にこうする, というわけではない. 受験者全体でどのような答案が多いかというような状況によっても, 部分点など評価は変化する. 入試が競争試験だからね. ただ君には, 単なる計算問題に見える問題でも

つねに論理的に考える

という姿勢が大切だな. 」



学校法人河合塾 数学科講師 大竹真一