バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第111回　今年の入試問題の話題から！

今年の問題を受験生諸君に紹介するとき，若干気に掛けることがあります．例えば，京大を受ける諸君のたくさんいるクラスで唐突に今年の京大の問題を紹介すれば，「自分で時間を測って今年のワンセットで考えてみたかったのに」とか「もう少し勉強してから夏休み明けにやってみようと思っていたのに」とかいう声が聞かれそうです．（遠くの大学で出題された問題や，文系の問題を理系の諸君に紹介するときは，そういう意味で，気楽ですね．）でも，今年の問題！というだけでインパクトはありますよね．

それでいて内容の興味深いものでないと紹介する価値がない？！これも考えどころです．難しいところです．

今年の入試問題の中から，いくつかの話題を紹介致します．

$a_1=2$，$a_{n+1}=5-\dfrac{4}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，数列 $\{b_n\}$ を，

$b_n=a_1\times a_2\times\cdots\times a_n$ で定義する。

[1] b_2，b_3 を求めよ。

[2] b_{n+1} を b_n，b_{n-1} を用いて表せ。ただし，n は2以上の自然数とする。

[3] $c_n=b_{n+1}-b_n$ と定めるとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

[4] 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

[5] 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（2020　立命館大・文系）

この問題の漸化式 $a_{n+1}=5-\dfrac{4}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ （＊）の解法はいくつかあります．漸化式は，ある形にはその解法があってそれを知っていればいい，と誤解している受験生のなんと多いことでしょう．それぞれの解き方はどういう考え方が根底にあるのか，どういう数学的意味があるのか，そうしたことを考え学ぶことが実はとても大切なのです．この問題を解きながら学ぶべきことは少なくありません．

いくつかの解法の概略を示します．

● 誘導に従って，解くと，$a_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$ と漸化式（＊）から，数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式

$$b_{n+1}=5b_n-4b_{n-1}$$

導き，この3項間漸化式を解けば，b_n さらに a_n を得ることになります．この誘導は入試問題ではあまり見かけませんね．

● 漸化式（＊）は $\dfrac{5a_n-4}{a_n}$ となり，この形の漸化式の解法も，よく知られていますね．

$$a_{n+1}-1=\frac{4(a_n-1)}{a_n},\quad a_{n+1}-4=\frac{a_n-4}{a_n}$$

片々割って，

$$\frac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-4}=4\cdot\frac{a_n-1}{a_n-4}$$

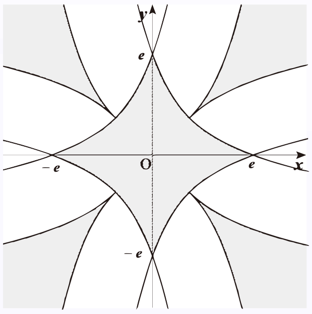
この形は，等比数列であることを表しますね．

● 帰納的に，数列 $\{a_n\}$ の各項は有理数である．よって，$a_n=\dfrac{p_n}{q_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$（ただし，p_n，q_n は互いに素な整数で，$q_n>0$）と表されて，以下，整数問題です．

バックナンバーはこちら

次の問題は領域と面積，体積の問題です．

(1) 関数$y=e^{|x-1|}$のグラフと関数$x=e^{|y-1|}$のグラフを一つの座標平面上に描け。
(2) 連立不等式$|y|\leqq e^{|x-1|}$，$|y|\leqq e^{|x+1|}$，$|x|\leqq e^{|y-1|}$，$|x|\leqq e^{|y+1|}$の表す領域をDとする。
このとき，Dを図示せよ。
(3 領域Dの面積を求めよ。
(4) 領域Dをx軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。
（2020　早稲田大・基幹理工・創造理工・先進理工）



この問題の(2)の領域Dは右のようになります．
図からもわかるように，領域Dは閉じた図形にならず，面積，体積を問う(3)，(4)解はいずれも，「有限な値をとらない．」ということになるのでしょうか？
私の生徒が，この大学を受験しました．彼に
「この問題はどう答えたの？」
と問うと彼は
「面積や体積を求める領域Dは有限な領域で考えるべきだと考えて，原点の周りの領域だけで計算を進めました．」
と答えたのです．なんと，臨機応変な態度でしょう．この柔軟さに驚きました．出題に何らかの不備があるときの態度として，満点ですね．（受験生にとって問題は大前提ですから，これを否定できない（つらい）立場にあるので．）
ほかにも，計算できないとか，∞に発散するとか，いろいろな対応が見られたと思います．たとえ問題に不備があろうと，その対応の仕方から十分に学力を評価できそうですね．
結局，全員に得点を与えるという，よくある結末になったとか．

①　$U=\{$ あ，い，う，え，お，か，き，く $\}$を全体集合とする。Uの部分集合
$A=\{$ あ，う，お，か，く $\}$，$B=\{$ か，き，く $\}$，$C=\{$ い，き $\}$について，
$A\cup B$，$A\cap B$，$A\cap C$，$\overline{A}$ を求めよ。
（2020　九州歯科大）

世間の人々にとって，数学は数を扱う学問だ，と思われているのではないかと思うことがあるのですが，この問題，潔いといってもいいくらい，数字が出てこない．これは問題１の小問の一つですが，この小問の番号のみが数字ですね．とても，集合Cですね．
集合Cは，「粋」ですものね．

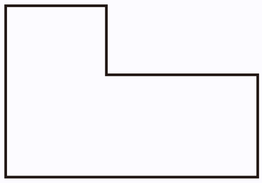
バックナンバーはこちら

文章量が，ほぼ限界ですので，この辺りで，恒例の「勝手に！第10回大学入試問題検定！！」です．

中級問題

とにかく，個性的な問題です．

右の図形は2個の長方形をつなげてできた図形である．まず，解答欄にこの図形のおおよその形を書き写しなさい．次に，1本の直線によりこの図形の面積を2等分する作図を行い，その作図方法が正しい理由を説明しなさい．



中学入試？しかし，受験生でも解けないかも？答えが一通りとは限らないところに難しさがあります．私も，いろいろと考えましたが，頭の柔軟な若者には負けそうですね．

これは，次の大学のうち，どの大学の出題でしょうか．

①千葉工大　②湘南工大　③金沢工大　④広島工大

それぞれの出題傾向を知っていればすぐわかる？かも？？

（前回の答えは，碁盤のような街京都の「京都大学」でした．なんでナンプレ？）

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**