

先生方のための徹底入試対策講座

第109回 今年の私大の出題は？

2020年の私立大学の入学試験も一部の大学の後期試験などを残してほぼ終わりに近づきました。

今年も、私立大学の入試問題に、多くの良問がみられました。単に、合否を決めればよいというものではありません。受験生の学力を見るというだけでなく、数学的に興味を引く問題も多く出題されています。

.....

1 東京慈恵会医科大学の入試問題3番です。

次の問いに答えよ。

- (1) a, b, n は自然数の定数で、 b は4の倍数ではなく、 $n \geq 2$ とする。
 a が 2^n の倍数であるが、 2^{n+1} の倍数ではないとき、 $a(a+b)$ 、 $2a(2a+b)$ のいずれかは、 2^{n+1} の倍数であるが、 2^{n+2} の倍数ではないことを示せ。
- (2) b は自然数の定数で、4の倍数ではないとする。
 3以上の任意の自然数 n に対して、次をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。
 $\frac{a_n(a_n+b)}{2^{2n}}$ は、小数第 n 位の数字が5である小数第 n 位までの有限小数で表される。

(2020 東京慈恵会医科大)

なあんだ、整数の証明問題じゃあないか、と思ったら、もう一度問題の文言を読み直してください。

(2)は「…の有限小数で表される」ことを証明する問題ではありませんね。「…をみたす自然数 a_n が存在することを示せ。」なのです。

したがって、「…をみたす自然数 a_n 」の例の一つを見つければよいということになります。そうした意味で、単に整数問題というだけでなく、論理の問題でもあるのです。

2 慶応大学理工学部は、判定の効率化？のための客観式がほとんどですが、多様な学力の判定のための記述式の合わせ技？の出題となっています。その記述式の問題は3番4番に含まれる小問です。

- 3 (1) $P(x)$ を整式とし、 $P'(x)$ を $P(x)$ の導関数とする。このとき、 $x = \alpha$ が方程式 $P'(x) = 0$ の解となることは、 $x = \alpha$ が方程式 $P(x) = 0$ の2重解となるための必要条件であることを証明しなさい。

- 4 実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し、

$$g(x) = \int_0^{2x} e^{-f(t-x)} dt$$

とおく。

- (2) 実数全体で定義された連続な関数 $f(x)$ に対し、 $g(x)$ は奇関数であることを示しなさい。

いずれも、典型的で難しくはないのですが、証明問題です。3(1)は「必要条件であることを証明」する問題で、ここにも論理的な内容が含まれます。基本的な論理のお話ができるかな、と問うているようなものですね。

このような、客観形式の中に記述を要求するものは、2018年に行われた「大学入学共通テストの試行調査」に3問あり、入試センターホームページにはその記述式の解答例も示されています。しかし、包含関係を表す式を書くもの、値の範囲を表す不等式を書くもの、残りの一つだけが文章での答えを要求するもので

(問題)

各点が移動する間における三角形APQ, 三角形BQR, 三角形CRPの面積をそれぞれ S_1, S_2, S_3 とする。各時刻における S_1, S_2, S_3 の間の大小関係と、その大小関係が時刻とともにどのように変化するかを答えよ。解答は、解答欄(う)に記述せよ。

(解答例)

(う) — (例) 時刻によらず, $S_1=S_2=S_3$ である。

(2018 大学入学共通テストの試行調査)

でした。これも慶応大の問題も、同じ客観の中にある記述式の問題ですが、ずいぶん雰囲気が異なりますね。

3 同志社大・全学部日程 [理系] (2/4実施) では漸化式

$$a_1=2, 3a_{n+1}=S_n(1-2S_{n+1})+1(n=1, 2, 3, \dots)$$

が与えられ、漸化式の問題かなと思えば、

ある既約な分数式 $f(x)$ を用いて $S_{n+1}=f(S_n)(n=1, 2, 3, \dots)$

と表され、さらに

$$\text{分数式 } g(x)=\frac{x+1}{\beta x+1} \text{ は条件 } f(g(x))=g(rx) \text{ を満たす。}$$

と続く、漸化式、分数式の恒等式の問題です。いい加減にやると答えは一応出てくるけれど、ここでは論理が問題なのではないでしょうか。これは記述ならではの問題でした。



このほかにも、おもしろい問題はいくつもあります。今のシーズン、筆者は新たな入試問題を見るのが楽しみです。先生方もそうでしょうか。



では、恒例の「勝手に！第10回大学入試問題検定！！」です。

初級問題

2020年、このような実生活に即したテーマの出題がありました。(以下、問題の一部です。)

ある工場の経営者が雇いたい人の数 A (人) と、この工場で働きたい人の数 B (人) は、時給 P (円) によって変化する。ただし、 A と B は整数であり、 P は $800 \leq P \leq 1600$ を満たす整数とする。

A は次の式①で決まることが知られている。

$$A = [\sqrt{20(3081 - P)}] \cdots \cdots \textcircled{1}$$

一方、 B は次の式②で決まることが知られている。

$$B = [\sqrt{50(P - 280)}] \cdots \cdots \textcircled{2}$$

この経営者は、雇いたい人の数 A と、工場で働きたい人の数 B が等しくなる時給で人を雇いたいと考えている。

どこの大学の出題でしょうか。京都の伝統のある大学です。「館」で、いえ、勘で答えてください。

学校法人河合塾 数学科講師 大竹真一