バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

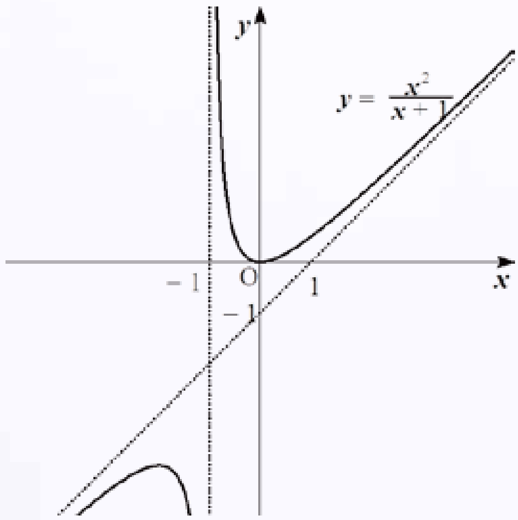
先生方のための徹底入試対策講座

第106回　ツールがグラフを描く！

先生方との勉強会での１コマです．

区間 $I=[0,\ 2]$において，$f_n(x)=\dfrac{x^{n+1}}{x^n+1}$ とするとき，関数列 $\{f_n(x)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は収束するか．

これに対して，ある先生が，「まず，関数 $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$のグラフから順に考えると収束の様子がよくわかる。」と言ってタブレットで，グラフをすぐに描きました．
グラフは右のようになります．



私は，タブレットを持っていないので，

$$f_1(x)=\frac{x^2}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$$

と変形して

$$y_1=x-1$$

のグラフと

$$y_2=\frac{1}{x+1}$$

のグラフを重ね合わせて，

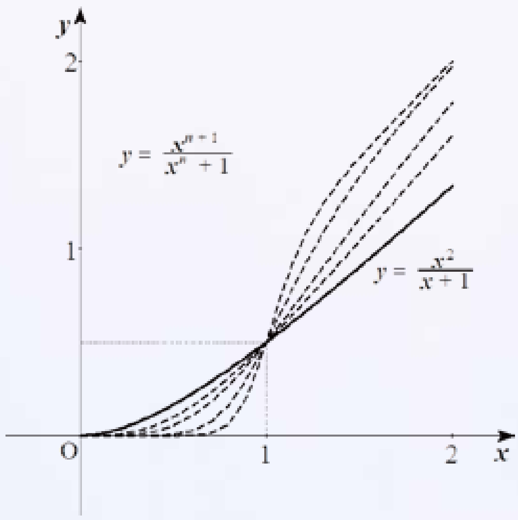
$$y=y_1+y_2$$

からグラフを得ました．

タブレットは次々に $y=\dfrac{x^{n+1}}{x^n+1}$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ のグラフを描き続けます．
もし，私も目の前にパソコンがあればこれを使ったかもしれませんね．

でも，そのときはもちろん，私は素手ですから，
$f_n(x)$の分子分母をそれぞれ x^n で割って，

$$f_n(x)=\frac{x^{n+1}}{x^n+1}=\frac{x}{1+\dfrac{1}{x^n}}$$



$0<x<1$ では x^n は単調減少だから $f_n(x)$ も単調減少，

$1<x<2$ では x^n は単調増加だから $f_n(x)$ も単調増加，

と考えました．

$x=1$ のときは　$f_n(x)=\dfrac{1}{2}$ ですね．

$n\to\infty$ を考え，極限関数 $f(x)$ もわかってしまいました．

バックナンバーはこちら

$$f(x)=\begin{cases}0 & (0 \leqq x<1)\\ \dfrac{1}{2} & (x=1)\\ x & (1<x \leqq 2)\end{cases}$$

です．

このときは，収束に関しての話題の中でしたから（この関数列 $\{f_n(x)\}$ は極限関数 $f(x)$ が不連続だから区間 I で一様収束しない），グラフの様子は，さっさとわかる方がよかったので，タブレットやパソコンという≪文明≫を使っていい場面でしたが．

これが、高校生や受験生のような数学を学んでいる過程にいる生徒にとっては，数学という≪文化≫を使って，その様子を知る手段を考えそれを使うべきなのでしょうね．

グラフを描くというだけでなく，計算をするということも同様ですね．

最近はスマホにもいろいろな描画ツールや計算ツールがありますね．使い方次第では有効であることもあるのですが，

高校生や大学生が，これらを安易に（？）用いるなら，心配

です．こうしたツールなどの≪文明≫を使うことにより，数学という≪文化≫を使うことをしないことにならないかと．

関数のグラフを描くことにより関数の性質を見ることは，数学の思考法として，重要なことだと思います．その方法を知り実際グラフを描こうとすることは，数学を学ぶ上では必要なことです．計算をしてその結果を実感することも同様ですね．

数学に限らず，

≪文明≫が≪文化≫を衰退させることもある

のですから．

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**