バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第105回　必要条件ですか？

次のような問題で，気になる誤答がありました．(1)でおかしな結果を出し，(2)以下の解答において混乱しているような答案です．

【問題】
関数$f(x)$がすべての実数x，yに対して

$$f(x+y)=f(x)f(y)-f(x)-f(y)+2 \quad \cdots(*)$$

を満たしている．さらに$f(x)$は$x=0$で微分可能で$f'(0)=-2$である．

(1) $f(0)$を求めよ．

(2) $f(x)$は任意の実数xで微分可能であることを示せ．

(3) $f(x)$を求めよ．

【誤答例】
(1) $(*)$に$x=y=0$を代入して　$f(0)=f(0)f(0)-f(0)-f(0)+2$

よって，

$$f(0)^2-3f(0)+2=0$$
$$(f(0)-1)(f(0)-2)=0$$

ゆえに，　$f(0)=1$，2　…（答）　((2)以下は省略)

さて，どこが間違いでしょうか．そのような誤答が出た原因は？対策は？

【正解の例】
(1) $(*)$に$y=0$を代入して　$f(x)=f(x)f(0)-f(x)-f(0)+2$

よって，

$$f(0)f(x)-2f(x)-f(0)+2=0$$
$$(f(0)-2)(f(x)-1)=0$$

ここで，$f(x)=1$（定数の関数）とすると，任意の実数xで$f'(x)=0$となり，$f'(0)=-2$に矛盾．

ゆえに，　$f(0)=2$　…（答）　((2)以下は省略)

上の「誤答例」も「正解の例」も，それぞれ，$(*)$に$x=y=0$，$y=0$を代入したのですから，必要条件を求めたに過ぎません．結果的に，前者は与えられた条件を満たさない不適な解を含み，後者は条件を満たす解のみ求めたことになります．

［(1)は(3)まで解いて$f(x)$が存在することが示されて初めて，必要十分な解と言えるわけですから，このような出題形式では(1)はそもそも必要条件を求めなさいという意味なのでしょうね．それだったらどちらも正解？？？というような議論も根底にはあるのでしょうが，今回は触れません．］

では，なぜこのように不適な解を含む誤答が出てきたのでしょうか．

バックナンバーはこちら

与えられた(*)には，二つの変数x，yが含まれています．「誤答例」では，その区別なく，$x=y$という条件を与えている，つまり，与条件が緩くなってしまったのですね．そこで，結果は求めるべき解$f(0)=2$を含むより大きな集合$f(0)=1$，2が得られたということになります．「正解の例」では，そうした余計な条件を加えていませんね．

生徒たちは，この「誤答例」のように解くことが少なくありません．
「$f(0)$を求めたいのだから，(*)に$x=y=0$を代入してダメなんですか」という声が聞こえてきそうです．
$x=y=0$は，彼らにとって，$x=0$と$y=0$という意識しかないのですね．$x=y$という特別な，極めて特別な条件を付け加えたという意識は，ほとんどありません．そうしたときには…

「$x=y$のときには(*)はどうなるかな」
「$f(2x)=f(x)^2-2f(x)+2$となります．」
「君は，次のような問題を考えていることになっているよ．」

関数$f(x)$がすべての実数x，yに対して

$$f(2x)=f(x)^2-2f(x)+2 \quad \cdots(*)$$

を満たしている．さらに$f(x)$は$x=0$で微分可能で$f'(0)=-2$である．
(1) $f(0)$を求めよ．

「あれっ，変ですね．」
と，自ら「何か変だな」という気づくことが生徒たちには大切ですね．「必要条件だから…」というような説明だけではなかなか腑に落ちないようです．

ちなみに，(2)，(3)の略解は次のようになります．念のため．

【略解】(2)

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-2f(x)-f(h)+2}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)-2)(f(x)-1)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{(f(h)-f(0))}{h}(f(x)-1)\\&=f'(0)(f(x)-1)\\&=-2(f(x)-1)\quad(\text{収束})\end{aligned}$$

よって，$f(x)$は任意のxで微分可能であり，$f'(x)=-2(f(x)-1)$
(3)　(2)から

$$e^{2x}f'(x)+2e^{2x}(f(x)-1)=0$$

$$\{e^{2x}(f(x)-1)\}'=0$$

よって，$e^{2x}(f(x)-1)=C$となるが，このとき$f(0)=2$から$C=1$
したがって，

$$f(x)=e^{-2x}+1 \cdots（答）$$

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**