バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第104回　これは整数問題だ！

高等学校の指導要領が現行のものに改定されて数年が経ちました．カリキュラムの変化は受験生の数学に関する考え方にも深く関わりそうです．よく見かける，漸化式の問題です．

次の初項と漸化式で決まる $\{a_n\}$ について，以下の問いに答えなさい。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

（1）一般項 a_n を求めなさい。
（2）数列 $\{a_n\}$ の極限を調べなさい。

（2018　大分大・医）

この問題の(1)について，何でもないように見える漸化式

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

は，一次分数変換の形の漸化式の典型的な解法があります．

≪典型的な解法≫

【略解】 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+1}{a_n}$ から，t についての方程式 $t=\dfrac{t+1}{t}$ すなわち $t^2-t-1=0$ の２解を α，β ($\alpha<\beta$)

として，$a_{n+1}-\alpha=\beta\cdot\dfrac{a_n-\alpha}{a_n}$ ，$a_{n+1}-\beta=\alpha\cdot\dfrac{a_n-\beta}{a_n}$ から，$\dfrac{a_{n+1}-\beta}{a_{n+1}-\alpha}=\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}$

よって，$\dfrac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1}\cdot\dfrac{a_1-\beta}{a_1-\alpha}$

すなわち，

$$\frac{a_n-\beta}{a_n-\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n$$

従って

$$a_n=\frac{\beta^{n+1}-\alpha^{n+1}}{\beta^n-\alpha^n}=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}$$

となります．

今の受験生は，なんと，これを，≪整数問題≫とみて解くのです．（え〜っ‼）

バックナンバーはこちら

≪整数問題とみた解法≫

【略解】初項 $a_1=1$ は有理数であり，a_kは有理数であるとすると，$a_{k+1}=1+\dfrac{1}{a_k}$ から a_{k+1}も

有理数となり，数学的帰納法により，$a_n\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はすべて有理数．ゆえに

$$a_n=\frac{p_n}{q_n}\ (p_n,\ q_n\text{は互いに素な整数で，}q_n>0)(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

と表される．このとき，与えられた漸化式 $a_1=1,\ a_{n+1}=1+\dfrac{1}{a_n}$ から

$\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=1+\dfrac{q_n}{p_n},\ \dfrac{p_1}{q_1}=1$．よって

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{p_n+q_n}{p_n},\quad \frac{p_1}{q_1}=1$$

$n=1,2,3,\cdots$について，p_n，q_n は，互いに素な整数で $q_n>0$だから，p_n+q_n とp_n は互いに素であり，p_{n+1} と q_{n+1} も互いに素であることから，$p_{n+1}=p_n+q_n$，$q_{n+1}=p_n$，また，$p_1=q_1=1$．すなわち

$$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n,\quad q_1=q_2=1,\quad q_{n+1}=p_n$$

数列$\{q_n\}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ はフィボナッチの数列で，$q_n=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$

また，$q_{n+1}=p_n$から $a_n=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{q_{n+1}}{q_n}=\dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2\left\{\left(1+\sqrt{5}\right)^n-\left(1-\sqrt{5}\right)^n\right\}}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

テストゼミの問題にあったのですが，正解だった答案のすべてが，≪整数問題とみた解法≫で，≪典型的な解法≫は皆無でした．

以前はこのような解法を答案ではあまり見掛けなかったのです．これも，

現行課程から数学Ａに「整数の性質」が登場

し，高校の授業で「整数の性質の分野」が≪普通に≫扱われるようになり，また，大学入試でも出題する大学が広がり，受験生にはなじみの分野となったことによると思われますね．

このように，高等学校の指導要領，カリキュラムなど，若い世代の諸君の考え方にも深く影響するものだと感じます．今後どのような改定があるのか，「単に高校教育のこと」ではなく，「若者のものの見方考え方にも影響があるもの」として，注視していかねばならないのだなあと，改めて思いました

バックナンバーはこちら

では，前回の「勝手に！第９回大学入試問題検定！！」の答えは……
「昔々のことじゃった，龍の谷に一匹の黒いネコが住んでいた」今この黒ネコは，ブームに乗って，写真やテレビ番組のモデルになっているとか，かどうか知らんけど….
龍谷大学理工学部でした.

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**