バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第103回　数学のセンスを養う？

今年の入試問題です．

(1) $a^4-2a^2b^2-2a^2c^2+b^4-2b^2c^2+c^4$を因数分解せよ．

(2) 円に内接する四角形ABCDにおいて，$\mathrm{AB}=a$, $\mathrm{BC}=b$, $\mathrm{CD}=c$, $\mathrm{DA}=d$とする．四角形ABCDの面積は，

$\dfrac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$ であることを示せ．

（2019　京都府立大・生命環境）

(2)は円に内接する四角形の面積の公式を証明する問題ですね．でも，その前にある(1)は因数分解の問題です．因数分解は容易で

$$a^4-2a^2b^2-2a^2c^2+b^4-2b^2c^2+c^4=(a+b+c)(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)$$

この式は，三角形の面積の公式であるヘロンの公式

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\qquad \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)$$

の根号内の符号を変えた式ですね．

これは大きなヒントになっています．(1)に関わるヘロンの公式とよく似た四角形の面積の公式を証明するのが(2)ですね．ヘロンの公式と同じように余弦定理を用いれば求められるはずだ，と方針は見えてきます．

四角形ABCDの面積をSとする．円に内接することから，$C=\pi-A$,

よって，$(0<)\sin C=\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}$,　$\cos C=-\cos A$

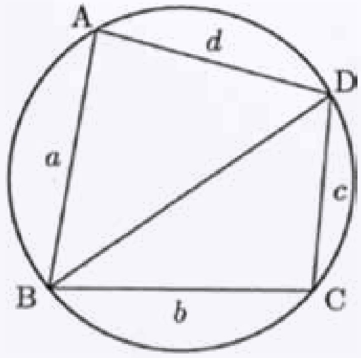
また，△ABDと△BCDにおいて余弦定理により

$$\mathrm{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos A=b^2+c^2-2cd\cos C$$

となることから，

$$2(ad+cd)\cos A=a^2+d^2-b^2-c^2$$

これらを用いて



$$S=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{BCD}=\frac{1}{2}ad\sin A+\frac{1}{2}bc\sin C$$
$$=\frac{1}{2}(ad+bc)\sin A=\frac{1}{2}(ad+bc)\sqrt{1-\cos^2 A}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(ad+bc)^2(1-\cos^2 A)}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\{(2ad+2bc)^2-(a^2+d^2-b^2-c^2)^2\}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{(2ad+2bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)\}\{(2ad+2bc)+(a^2+d^2-b^2-c^2)\}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{-(a-d)^2+(b+c)^2\}\{(a+d)^2-(b-c)^2\}}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)}$$
$$=\frac{1}{4}\sqrt{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)}$$

バックナンバーはこちら

ヘロンの公式を知っていても証明をしたことがないようなら，この問題には手も出なかったとなるかもしれませんね．

「ヘロンの公式は知っているけど，$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ の形しか習わなかった．」という声が聞こえてきそうですが，習った後自分でもう一度証明してみたら，(1)の結果 $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ は，その証明の中で出てきた式と気づくのではないかと思います．

≪習っただけ，証明を読んだだけ，公式を覚えただけ，では(1)の結果とヘロンの公式は結び付かない≫でしょうね．もう一度自分で証明してみる，これは定理の勉強法としては大切なことです．そしてその証明の中での考え方が，また別の問題を解くときに用いられる，ということはよくあることですね．

基本的な定理・公式の証明は数学の考え方の宝庫

考え方だけではなく，巧みな式変形や美しい計算なども含まれることが多く，こうした定理・公式の考え方などを身につけていくことが，やがて数学のセンスを身につけていくことになりますね．

最も易しく数学のセンスを養う

ことになります．

この円に内接する四角形の面積の公式はブラマグプタの公式と呼ばれています．こんなすごい定理の証明をたやすくやることができるって，素敵ですよね．

では，恒例の「勝手に！第９回大学入試問題検定！！」です．

初級問題

昨今，猫が人気のようです．猫の写真を撮る有名な写真家がいるそうですね．これもブーム真っただ中の今年の問題です．

動物の画像が入力されると，「ネコである」「ネコでない」のいずれかの判定を行う人工知能がある．この人工知能は，

・入力された画像がネコの画像であるとき，「ネコでない」と誤って判定する確率が $\frac{1}{100}$

・入力された画像がネコの画像でないとき，「ネコである」と誤って判定する確率が $\frac{2}{100}$

である．

……（以下，状況の説明が続きます．もちろん省略しますね．）

さて，この問題，ずばりどこの大学の何学部でしょうか．

昔々のことじゃった，龍の谷に一匹の黒いネコが住んでいた，かどうか知らんけど…

前回は……「将棋だから総合的に政策を，いえ，作戦を？」

総合的に政策？？総合政策？？？

前回の答えは，慶應義塾大学総合政策学部！でした！！

学校法人河合塾　数学科講師　**大竹真一**