

先生方のための徹底入試対策講座

第102回 ふたつの定積分の話題？

今年の東大・理科，京大・理系のいずれも，定積分の値を求める（だけの）問題がありました。かつて京大は前科？がありますが，東大は初めてではないでしょうか。（かつての一次試験を除いては。）両巨頭が同時に！驚きました。

最近，大学生の微積分の力が落ちてきているとささやかれています。私も実感するところですが，東大，京大までとは.....

東大の定積分の問題は

次の定積分を求めよ。

$$\int_0^1 \left(x^2 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) \left(1 + \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} \right) dx$$

京大の定積分の問題は

次の定積分の値を求めよ。

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos x}$$

でした。東大のほうがちょっと難しそうですが，東大受験生にとっては十分対応できるレベルです。でも，この問題でも差は出るので。これらの問題の平均点はかなり高いですが，これをもたもたと長時間かけてやった受験生は，他の問題にかける時間が無くなるので，結局この問題の学力差は他の問題の得点に反映するということですね。

知人に教えてもらったことですが，ネットに上がっている入試問題の積分 $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$ に次のような計算をしている解答がありました。

$$x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right) \text{ とおく。ここで，} \sin \theta = \frac{1}{3} \text{ となる } \theta \text{ を } \alpha \text{ とおくと } \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ であり}$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta}{\sqrt{1-\sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta = \int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cos \theta d\theta = \int_0^{\alpha} \sin \theta d\theta = 1 - \cos \alpha = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

この積分は， $1-x^2=t$ とおく置換積分で，一気に求まりますよね。もちろん，問題が素朴なので大きな差ではないのですが，ネットの積分は $\sqrt{1-x^2}$ を見て，条件反射で $x = \sin \theta$ と置いたとしか思えません。置換積分をじっくりと学んだなら，ここは $1-x^2=t$ ですよね。あるいはこれを頭の中で考えてそれこそ一気に

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-\sqrt{1-x^2} \right]_0^{\frac{1}{3}} = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

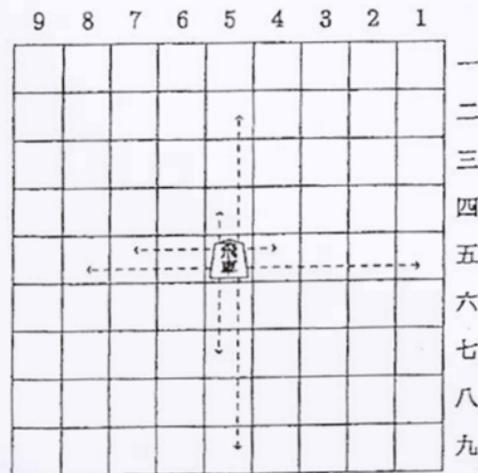
です。置換積分は条件反射やパターン認識ではありません。置換積分そのものをしっかりと学ぶ姿勢が重要です。

では、恒例の「勝手に！第9回大学入試問題検定！！」です。

中級問題

昨今、若い将棋の棋士たちが活躍しているらしいのですが、ちょっとしたブームになっているのでしょうか。でも入試に出題するなら、将棋を知らない受験生のために説明する必要があるらしくて、このような問題が出ています。ブーム真ただ中の今年の問題です。

将棋盤は下図のように縦横9マス計81マスからなる。盤面の右上を起点として図のように横を1, 2, ..., 9とアラビア数字であらわし、縦を一, 二, ..., 九と漢数字であらわす。駒の位置は横と縦の数字の組であらわし、下図では飛車の駒が置かれているマスは「5五」である。



将棋のルールでは、1回に飛車の駒を縦横の任意の位置に動かすことができる。駒の1回の移動は「1手」とよばれ、たとえば、5五の飛車は1手で5二, 5四, 5七, 5九, 1五, 4五, 7五, 8五などに動かすことができる。しかし、5五の飛車を1手で1一に動かすことはできず、「5五⇒5一⇒1一」と2手..... (以下、延々と将棋の手順と手数の説明が続きます。もちろん省略しますね。)

さて、この問題、ずばりどこの大学の何学部でしょうか。

将棋だから総合的に政策を、いえ、作戦を練らねばなりませんよね。

前回は…… 樹形図が大きな斜めの形状になっていく問題でしたね。

大きな斜めの形状？大きな坂？？大阪？？？

前回の答えは、大阪大学！でした！！