バックナンバーはこちら

河合塾・大竹先生による

先生方のための徹底入試対策講座

第７回　極限値は１？？

「先生，さっきの問題なんですが，間違ってませんか？」
「ええっ．どこが？」
「格子点の数と面積の比の値の極限値は 1 です．」
「なぜそんなことがいえるの？」
「先生は知らないのですか？」

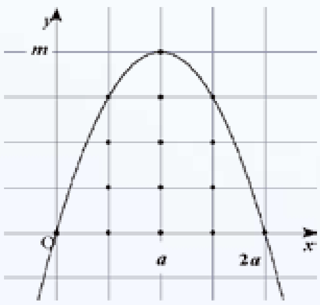
・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

京都大学の入試問題を素材に講義した直後の質問です。

> a，m は自然数で a は定数とする．xy 平面上の点 $(a,\ m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通る放物線を考える．この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m この領域の内部および境界線上のある格子点の個数を L_m とする．このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ．ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである．
> （９８　京都大学・理系）

彼の主張は，次のようなものでした．

＜一辺の長さ 1 の正方形に領域を分け，格子点 1 個とこの正方形 1 個をほぼ対応させることができる．領域の境界付近をのぞけば，正方形と格子点は 1 対 1 に対応させることができ，したがって，極限では面積と格子点の個数は等しくなり $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=1$ である．(誤答！)＞



解答は後で示すとして，正しい答は

$$\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}$$

となります．

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

「正方形と格子点を 1 対 1 に対応させるのは，近似的な見かたなのだから，極限値が 1 にならないこともあるよ．根拠もなく絶対 1 だと思うのは数学ではないよね．大雑把に見て，近似的に求めてみること自体は，数学的にも重要な考え方だが，これが答を得るための簡便法であってはいけないね．」

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・

確かに，極限では面積と格子点の個数は等しくなるといったことを書いている参考書，受験雑誌を見たことがあります．

どういうときに成り立ち，どういうときに成り立たないか，そこまで考察を進めれば立派な？数学なんですが，この手の参考書，受験雑誌にはそのようなところまでないのです．このようないい加減なことを書いてあるなら，それを読んだ受験生が間違うのも無理はありません．

バックナンバーはこちら

- いわゆる受験テクニックなるものは，「答を得るための簡便法」に過ぎない．
- 予想と違う結果がでてきたならその結果に対してさらに考察してみる，このような立場に立つなら，本当の意味での受験テクニックとなる．

この問題は，「答を得るための簡便法」を「受験テクニック」といって教えようとする受験指導者に対する警鐘かもしれませんね．

この 1 問で，京都大学の出題者がいかに本質的な考察を要求しているかが感じ取られます．（京都大学だけではなく，おそらくすべての良心的な出題者はそうであると思います．）

では，簡単に解答を示しておきます．

略解 領域内において，直線 $x=k$ 上の格子点の個数を l_k とおくと

$$-\frac{m}{a^2}(k-a)^2+m<l_k\leqq-\frac{m}{a^2}(k-a)^2+m+1$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}\left\{-\frac{m}{a^2}(k-a)^2+m\right\}=\frac{m}{3a}(4a^2-1)$ であり，$L_m=\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}l_k$ だから

$$\frac{m}{3a}(4a^2-1)<L_m\leqq\frac{m}{3a}(4a^2-1)+2a+1$$

よって $\displaystyle\frac{4a^2-1}{4a^2}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{4a^2-1}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4a\ m}$

$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{3(2a+1)}{4a\ m}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=\frac{4a^2-1}{4a^2}$ …（答）

学校法人 河合塾　数学科専任講師　**大竹真一**