

先生方のための徹底入試対策講座

第3回 定理・公式の証明(2)

～東大に出た基本公式の証明～

東京大学の入試にこのような問題が出題されたことがあります。三角関数の加法定理を証明させる問題です。世間でかなり話題になりました。

(1) 一般角 θ に対して $\sin\theta, \cos\theta$ の定義を述べよ。

(2) (1)で述べた定義にもとづき、一般角 α, β に対して、

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta, \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。

(99 東京大学・理類)

この問題に対して、「教科書にある定理の証明を要求する基本問題である」というような評価を見たことがあります。しかし、これを単に公式の証明とみると東大入試の出題意図の本質を見失うことになりかねません。(2)の

「(1)で述べた定義にもとづき」

を見落としてはならないからです。

(1)で高校の教科書にあるように円上の点の座標を用いて定義するなら、それにもとづいて(2)の公式を証明しなければなりません。しかし正解はこれだけでしょうか。定義の仕方はいろいろあります。同値であるような表現はいくらもあります。どのように定義した場合にも、それが妥当である限り、(1)で述べた定義にもとづき(2)の公式を証明すればよいのだということになります。例えば(1)において、 $\sin\theta, \cos\theta$ を無限級数で定義し、それにもとづいて(2)を証明したならそれはそれでよく、あるいは、複素数の世界で三角関数を定義し、それにもとづいて(2)を証明したならそれもよいわけです。もちろんそのような答案が実際にあったかどうかは問題ではありません。あくまでこの出題は、

(1)と(2)の間の論理性に意味のある出題

であるということです。

ある受験の対策本に

「 $a=\cos\alpha+i\sin\alpha, b=\cos\beta+i\sin\beta$ とにおいて、公式 $ab=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ を用いるのは、大減点。(高校の)教科書ではこの公式は三角関数の加法定理を用いて導かれているから。」

(この頃はまだ複素数平面が高校の数学の範囲に入っていました。)

という趣旨のことが書いてありましたが、このような理由で減点するとは到底考えられません。なぜなら、大学入試は高校の教科書あるいは指導要領の内容を知っているかどうかを尋ねるものではないからです。数学の学力を試しているのだから、教科書の記述に左右されるとは奇妙なことですね。大減点するならそれは、

(1)で述べた定義にもとづいていない

からです。

そんなこまかい言葉にこだわるのだろうかと思われるかもしれませんが、数学に関わる人は言葉にこだわる傾向が強いですね。言葉は論理そのものだからです。問題文は漠然と読むのではなく意識的に厳密に読むとすることが要求されます。

(1), (2)の論理関係にばかり言及しましたが、もちろん、受験生は論理の出発点として教科書にある $\sin\theta, \cos\theta$ の定義を知っておかなければなりませんし、加法定理の証明はいつでも出来なければなりません。定義を疎かにしたり、証明できないままに定理を平然と使うのは数学以前ですよ。

- 日頃から文章は意識的に厳密に読むことを心がける。
- 問題や解答の中での言葉づかいに興味関心をもっておく。
- 定義・定理は確実なものにしておく。(ここには努力が要る。)