啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

フォーカスゴールド Focus Gold 通信

◆ ３年かけて自分の最高の参考書をつくる p.2-7

秋田県立秋田南高等学校　中村 東

◆ 漸化式解法のある試み p.8-10

海城中学高等学校数学科　川崎 真澄・城島 智子

◆ 秘伝の授業技を開発する ～指導ネタの蓄積を～ p.11-16

岡山県立岡山朝日高等学校　山川 宏史

vol.17

授業
実践記録

3年かけて自分の最高の参考書をつくる

秋田県立秋田南高等学校　中村 東

1．はじめに

私は受験生に対して，数学の受験勉強はまず網羅系の参考書を3周以上繰り返し，例題を完璧にすることが受験の基礎だと繰り返し指導してきた。

しかし，授業で扱っていない参考書の例題を自分で学ぶことができる生徒は，一部の数学が得意な生徒に限られていた。

だが，私はこういった自分の力で参考書に取り組めない生徒たちに不足しているのは，数学の力ではなく，「授業で習っていないことを自分の力だけでやるのはハードルが高い」という思い込みがあるのではないかと考えていた。

一方で，例えば病気で授業を休んだ生徒や部活動の試合のため公欠になった生徒，極端に言えば授業中に寝ている生徒でさえ，一度授業で扱った内容であれば考査までに何とか理解をしようとする。これはやはり「一度授業で扱った内容である」から「やればできる」という意識があるからであろう。

そのため長らく考えていたのは，参考書の例題を，授業中に扱っていくことはできないか，ということである。

そこでH27年度の入学生から，授業中にできるだけフォーカスゴールド（以下FG）の例題を取り扱っていくことに挑戦した。

2．本校について

本校は秋田市内にある高校である。H27年度入学生からは京都大学1名，東北大学13名の難関大レベルに合格者を輩出しているが，多くの生徒は中堅クラスの国公立大学や地方国公立大学に進学している。例年，予備校の模擬試験の1年7月時の偏差値は55前後。センター試験の校内平均点はおおよそ全国平均程度である。おそらくFGを採用している学校の中では，決してレベルの高い方には入らないだろう。

実際にFGを授業で活用していても，本校の生徒には少しレベルが高いかもしれないが，力をつけるために「少し背伸び」させている，という意識で取り組んできた。

3．参考書の授業での使用は入学後すぐに

先にも述べた通り，FGの例題は本校生徒にとってはややレベルが高い。しかし1年生の入学時から普通に授業で扱ってきたため，生徒にとってはこの参考書レベルで授業が行われるのが当たり前と考えており，特に抵抗感はない。

以前，授業では参考書を一切扱わずに長期休業中の課題としたことがあるが，やはり生徒は「参考書は難しい」という意識が強かった。これは普段の授業が教科書のレベルで行われているため，生徒にとっての当たり前のレベルが「教科書」であり，「参考書」はそれより上のレベルのため難しいと考えているのではないかと感じた。しかし，初めから授業で参考書を扱っていれば，生徒にとっての当たり前は「教科書」ではなく「参考書」のレベルになるため，参考書に対する抵抗感は少なくなる。

このため大切なのが，入学後すぐに授業で参考書を使い始めることである。入学直後は教科書レベルで授業を行い，途中で参考書を入れて行こうとすると，おそらく失敗すると考えている。生徒にとっての「当たり前」は入学直後の授業で作られるので，一度教科書レベルを当たり前と思われると，そのあと参考書レベルの授業にしようとすると抵抗感があると思われる。

4．授業での活用方法について

授業の中では最初は教科書を用いて解説や問題演習を行い，その後に関係するFGの例題を解説したり生徒に解かせたりして使用している。

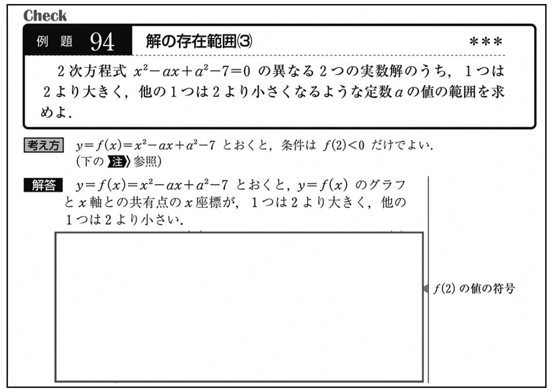
＊が1つ〜3つの問題に関してはできるだけ授業で扱うようにしており，＊が4つのものは特に大事なものだけ扱った。

また，授業は一つの単元を2周するようにして行っている。例えば2次関数に関して，1周目は教科書の内容とFGの＊が1つと2つの例題を一通り進み，そのあと一度確認テストを行う。このテスト勉強である程度力が付いた状態で，2周目は＊が3つと4つの例題を扱う。そして＊が3つと4つの例題に関してもテストを行うが，このテストは例題に極めて似た問題だけで構成させる。生徒には＊3つと4つの問題が実際の入試レベルの問題で，この例題をきちんとマスターできれば，難関大の2次試験にも十分対応できると話している。

5．ICTの活用について

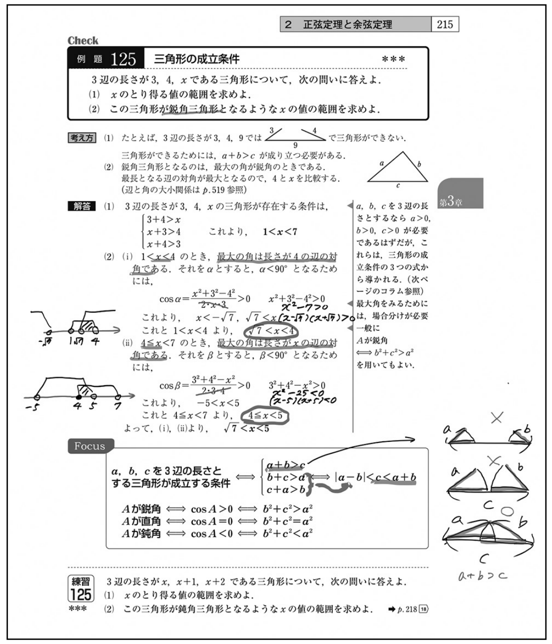
これは私独自の取り組みであるが，授業の効率化を図るために，FGの紙面のPDFをプロジェクターで投影して解説を行っている。

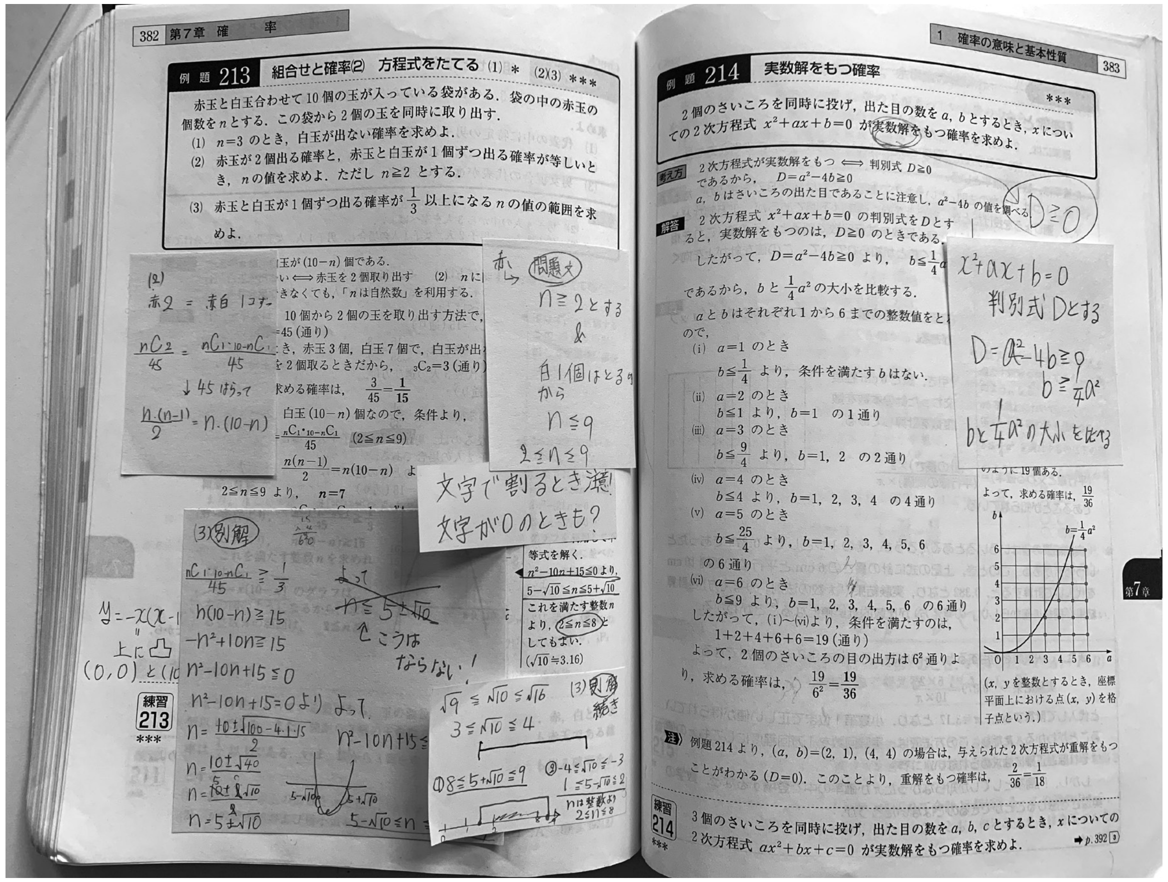
以前はプロジェクターで紙面を投影し，解説は黒板で行っていたが，今年からはiPadとApple Pencilを使い，PDFに直接解説などを書き込みながら授業を行っている。

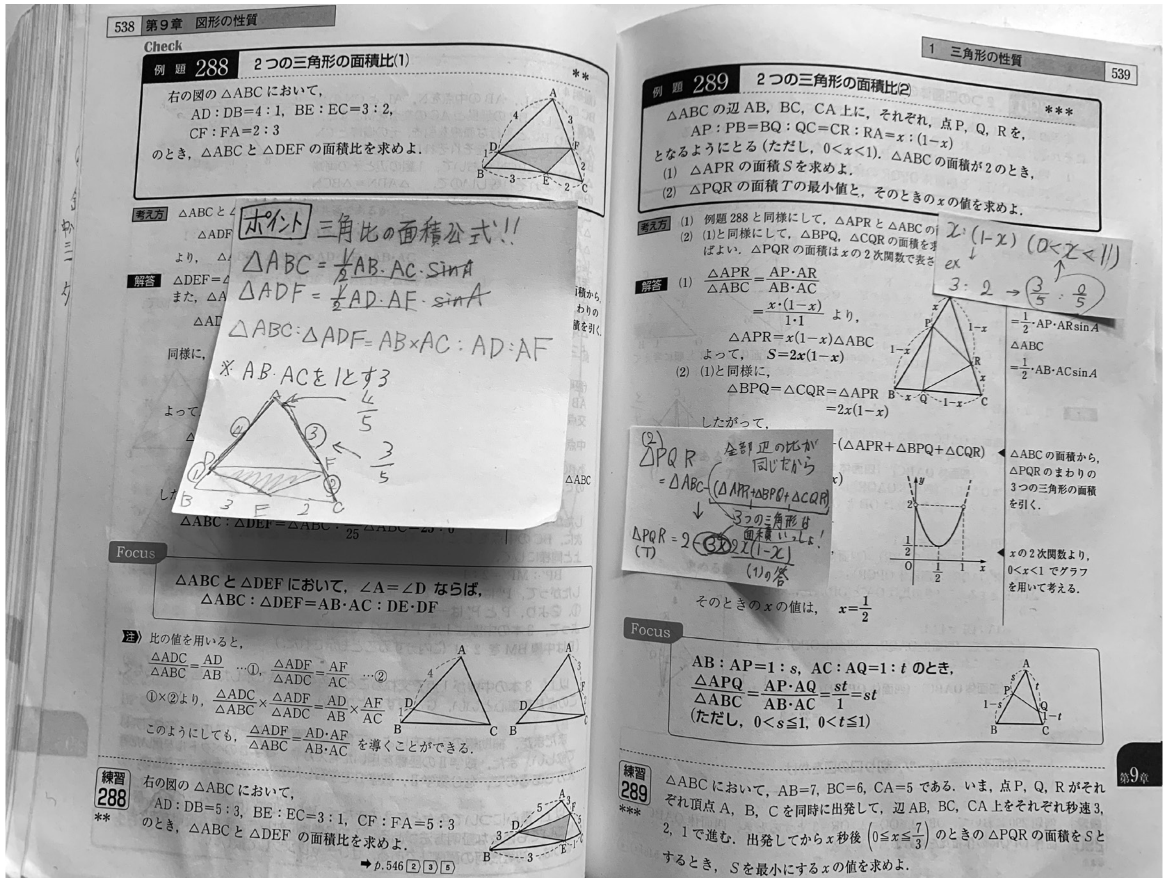


写真のように，例題の解答の上に，PDF編集アプリの作画機能を使って目隠しをし，解説をしながらその目隠しを剥がしていく。

特に難しいところはApple Pencilを活用してPDFの紙面に書き込みをしながら解説を行っている。







そして生徒にはノートではなくFGの紙面に同じように解説を書き込ませたり，付箋に解説を書いて貼らせたりしている。

ただし，問題文には絶対に書き込まないように指導している。問題文に書き込みをすると，復習をする際にヒントになってしまうためである。

以前に私が秋田県の数学部会で研究したことがあるのだが，受験生である高校3年生に，受験勉強で最も使用したものは何かを聞いたところ，多くの生徒は問題集や参考書，教科書と答え，授業のノートと答えた生徒は数%に満たなかった。

つまり，せっかく授業中にFGの例題を解説しても，その解説を書いたノートは受験期にはほとんど活用されることがない。それならむしろFGの紙面に直接解説を書き込んでおき，受験生になったときにFGが自分にとって最も分かりやすい状態にしておくのが良いのではないかと考えてこのようにしている。

そのため，以前板書で解説していた時はFGの解答と若干異なる解説をしていたことがあったが，今はあえてFGの解答の通りに解説を行っている。繰り返しになるが，生徒たちはたとえノートをとっていてもノートではなく参考書を見て勉強をする。そのときもう一度読み直すのはFGの解説であり，それが理解できないといけないからである。

このようにあえて解答と同じ解説をするようになったのは，以前勤めていた秋田県のトップ校の生徒の発言がきっかけであった。

その生徒は文系の生徒で，決して数学は得意ではないが，そこはやはり県内トップ校の生徒。そこまで数学ができないわけではない。

この生徒がある数学の先生の授業について，「あの先生は毎回教科書と違う解説をするから，テスト前に教科書を見直して勉強したときに分からない。」と言っていた。

この先生は，教科書と同じ解説をしては生徒に飽きられてしまうと考え，毎回異なる解法で指導を行っていたのであるが，それが彼女にとっては裏目に出ていたようである。

秋田のトップ校の生徒でさえ，教科書通りの解説を望んでいるというのは非常にショックだった。これをきっかけに教材を教材の通りに教えることの大切さに気付き，以来なるべく教材と同じ解法で解説を行い，別解で解説する場合はその別解を教材に残るように付箋などに書いて貼らせるようにしている。

6．授業以外での活用について

定期考査のテスト範囲にはFGの例題を組み込んでおり，確認テストや考査の前にFGノートにテスト範囲のFGの例題を解いて提出させている。

また，長期休暇課題もFGから選んで提示している。模擬試験の偏差値ごとに，例題をもう一度解きなおす生徒，練習問題を解いてくる生徒，Step Up問題を解いてくる生徒に分けている。

模擬試験の復習の際には，解けなかった問題をFGの例題に分解するように指導している。FGを「解法の辞書」のように使わせ，すべての問題は例題の組み合わせでできていることを意識させている。

解けなかった問題は，解くために必要な例題が頭に入っていなくて解けなかったのか，それとも例題は頭に入っているが問題を例題に分解できなくて解けなかったのかをはっきりさせる。

前者の場合は，その例題をしっかり復習し身に付けること。後者の場合は問題文を読み返し，なぜ分かる例題なのに，その例題を使うという発想が出なかったのかを分析すること。以上のような復習をするように心がけさせている。

7．チェック表の活用について

これは H27 年度入学生が 3 年生になった際に配ったFG 例題チェック表である。

できたら○　できなかったら×　不安なら△

		1回目	2回目	3回目	4回目	5回目
例題1	＊					
例題2	＊					
例題3	＊					
例題4	＊					
例題5	＊＊					
例題6	＊＊					
例題7	＊					
例題8	＊					
例題9	＊					
例題10	＊＊					
例題11	＊＊					
例題12	＊＊					
例題13	＊＊					
例題14	＊＊					
例題15	＊＊					
例題16	＊＊＊					

このチェック表をすべての例題について作成し，ⅠA，ⅡB，Ⅲごとに冊子にして生徒に配付した。

FG の例題を順番に解いていき，解けた例題には○，不安な例題には△，解けなかった例題には×を記入させた。

1 周目で丸が付いた問題は，2 周目以降には解かずに×と△の問題だけ解いていく。これを最低 3 周は行うように指示をした。

特に回収して指導などはしていなかったが，生徒達は喜んで活用していたようだった。

本当はこれをデジタル上で行い，例題の達成率が何％とか，達成率の校内順位などが出るようにしたいと考え，様々なデジタルサービスの活用を考えた。残念ながら H27 年度入学生にはデジタル上での活用はできなかったが，今後は ATLS というアプリを使用すると同じようなことができるということで，こちらに関しても大いに期待している。

8．H27年度入学生について

H27 年度入学生は，入学当初の模擬試験ではこれまでにないほど低い偏差値だったが，遠慮することなく FG を使用し続けた。その後，1 年生の 11 月の模擬試験で一度偏差値が上がったものの，ここ何年間で一番低い偏差値であることは変わらなかった。

だが，FG を使用している効果は，1・2 年生ではなく 3 年生，受験生となったときにこそ出ると信じて使い続けた。

H27 年度入学生たちは，FG がボロボロになるまで使い込んだ。結果，3 年生最後の記述とマーク模擬試験では過去 5 年間で最高の偏差値を叩き出した。そして実際の受験でも，中堅国公立レベルの大学を受験した生徒から「受験の問題より，ウチの学校の定期考査の方が難しい」という発言が聞かれた。

これらは一貫して FG を使用したレベルの高い授業をしてきた効果が発揮されたと考えている。

また，この年に浪人した生徒が学校に来て語ったことがある。「ウチの学校は FG を標準的に授業で扱ってくれたおかげで，他の学校の浪人生より予備校の復習時間が半分くらいで済む。入試レベルの問題の復習をするときに，FG を一通りやっているおかげで，FG のどの問題に分解すればいいかすぐわかる。ところが他校の生徒は参考書を使い慣れていないので，どこにどんな問題が書いてあるかわからなくて，予備校の復習に自分の倍くらいの時間がかかっている。それを見てあまりに効率が悪く，卒業してみて初めてウチの学校の数学の授業のありがたさに気づいた。」と語ってくれた。

9．H30年度入学生について

現 1 年生である H30 年度入学生でも継続して FG を授業で活用している。H27 年度入学生で 3 年間使っていたために以前と比べて教員側が使い慣れたためか，FG 自体が改訂されたためか，H27 年度入学生と比べて少し進度が速い。

H27 年度入学生と比べて授業での取り扱いが違っているのは，練習問題の活用について一つ挙げられる。以前の FG の場合，例題を解説し下の練習問題を解かせようとすると，例題と練習問題の間にレベル差があり難しい場合が多く，FG の例題を解説した後に教科書の傍用問題集の中から問題を選んで解かせたりしていた。改訂になった今の FG では，あまり気にしないで練習問題を解かせている。

また，以前は例題 1 題についてほぼ全部解説をしていたが，最近は生徒にヒントを与えて例題を生徒自身に解かせるようにしている。これはやはり受け身で解説を聞くより，生徒自身で解かせた方が主体的に取り組めると考えての取り組みである。例題を解説した場合には，理解に自信のある生徒は練習問題を解き，自信のない生徒は例題を解きなおすように指示している。

10．3 年かけて自分にとって最高の教材を作る

先に FG に直接解説を書き込ませたり，解説を書いた付箋を貼らせたりしていると述べたが，これは 3 年生になった自分のためにやっていることだ，と生徒には次のように話している。

「3 年生になったら，もう一度数学ⅠA の FG から全部 3 周以上解きなおすのが数学の受験勉強の基礎作りだ。だから 3 年生になった自分が見て，一番分かりやすいと思えるような FG を自分で作っていくんだ。」 このように，高校 1 年生の最初から，受験の最後まで使っていく教材を使用しているのだ，という意識付けを強くしている。

略歴

中村 東　なかむら あずま

秋田県秋田市生まれ。
東北大学情報科学研究科を修了。
教職歴20年目で本校勤務は5年目。
ICTを活用した授業を10年続けている。将来的にはICTを活用することで個々の生徒の理解に応じた指導が可能になる「アダプティブラーニング」の実現を目指して取り組んでいる。

漸化式解法のある試み

海城中学高等学校
数学科

川崎 真澄
Masumi Kawasaki

城島 智子
Tomoko Joujima

Motivation　大学受験数学における漸化式の解法は高度に定番化していますが，なお有用かつ新しみのある解法はないでしょうか。本稿はその一試案を問うものです。

§1．一次分数漸化式の一解法

まず最初に，“定番”の漸化式のレベルの上限と思われる一次分数漸化式について扱います。このタイプの漸化式の解法は，比をとるものや行列の n 乗を援用するものなどがあり，そのどれもが深い背景をもち，興味深いものです。

その一方で，敷居が高いと考える生徒が少なくないようで，例えば，

【問題 1】　$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$，$a_1=1$　……①

のようなタイプが解けないと嘆く高校生は少なくありません。とりわけ，背景が深いだけに，“解法の必然性”を理解できず，“その場しのぎの解法の暗記”に終始してしまっていることが多いように思われます。とは言うものの，

$$a_{n+1}=\frac{2a_n}{a_n+3}，\ a_1=2 \quad ……②$$

のようなタイプは解けるようです。

確かに，このタイプであれば，$a_n\fallingdotseq 0$ (for all n) を示し，両辺で逆数をとれば容易に解けるからでしょう$\left(②の解は，a_n=\dfrac{2^n}{3^n-2^n}\right)$。

本稿では，②が容易に解けるなら①も容易に解ける解法を示しましょう。その背景は，一次分数関数についてのごくごく簡単な性質です。一般に，

一次分数関数 $y=\dfrac{px+q}{rx+s}$ $(ps-qr\fallingdotseq 0)$ は，

平行移動によって $Y=\dfrac{kX}{lX+m}$ $(km\fallingdotseq 0)$ と

変形できる

ことは分かると思います。そのための平行移動のさせ方は無数にありますが，一例として $x-\alpha=X$，$y-\alpha=Y$ としてみましょう。例えば，

$$y=\frac{x-2}{x+4} \quad ……③$$

であれば，

$$Y+\alpha=\frac{X+\alpha-2}{X+\alpha+4}$$

$$\Longleftrightarrow Y=\frac{(1-\alpha)X+(-\alpha^2-3\alpha-2)}{X+\alpha+4}$$

なので，α として，

$$-\alpha^2-3\alpha-2=0 \Longleftrightarrow \alpha^2+3\alpha+2=0$$

の解である -1 または -2 をとればよいことが分かります。例えば，$\alpha=-1$ とすれば，

$Y=\dfrac{2X}{X+3}$　……④　とできるわけです。

ここで，①と③，②と④を比べてみてください。そうです，この平行移動は，

①の解法に通ずる

と言えるので，具体的に示してみましょう。

$a_{n+1}=\dfrac{a_n-2}{a_n+4}$ は，$a_n+1=b_n$ とおくことで，

$b_{n+1}=\dfrac{2b_n}{b_n+3}$ と変形できます。

加えて，α の“出所”は，

$$\alpha^2+3\alpha+2=0$$
$$\Longleftrightarrow \alpha^2+3\alpha+2+\alpha=\alpha$$
$$\Longleftrightarrow \alpha(\alpha+4)=\alpha-2$$
$$\Longleftrightarrow \alpha=\frac{\alpha-2}{\alpha+4}$$

から分かるように，a_n，a_{n+1} をともに α に置き換えてできる方程式の解なのです。

以上をまとめておきます。

一次分数型漸化式

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+s}$ $(ps-qr\fallingdotseq 0)$ の解法の一例：

Ⅰ．方程式 $\alpha=\dfrac{p\alpha+q}{r\alpha+s}$ を解き，

Ⅱ．Ⅰで得られる α (2つある場合はどちらでもよい) に対して，$a_n-\alpha=b_n$ とおくと，

Ⅲ．$b_{n+1}=\dfrac{kb_n}{lb_n+m}$ $(km\fallingdotseq 0)$ の形に変形される。

なかには，“また新たな解法を覚えなければならないのか…”と嘆息を漏らす人がいるかもしれませんが，思えば，二項間漸化式の基本形である $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\fallingdotseq 1)$ の解法の手順も，

a_n，a_{n+1} をともに α に置き換えてできる方程式 $\alpha=p\alpha+q$ を解くことがスタート

で，$a_n-\alpha=b_n$ とおいて変形 $(b_{n+1}=pb_n)$ させて解いたのですから，新たな解法どころか，これまでの解法がそのまま利用できることが理解されることでしょう。

【問題 1】の答は次の通りです。

$$a_n=\frac{2^{n+1}-3^n}{3^n-2^n}$$

なお，この解法は α が“重解”の場合でも問題ありません。§3の練習問題を参照してください。

§2．非定型漸化式の一解法

次に，“定番”の範囲を超えるものの，巧妙な誘導や帰納法の援用で解くことができるためにままに出題される漸化式の“母関数”を利用した解法を紹介します。

(その1)　北海道大学 (1998)

【問題 2】　次の条件で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1=1,\quad \frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_k a_{n+2-k}$$

$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

【解答】

$$f(x)=a_1x^0+a_2x^1+a_3x^2+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^k$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k-1} \quad ……(※1)$$

とすると，

$$\{f(x)\}^2=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k-1}\right)^2$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\left(\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\right)x^n\right\}$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n \quad ……(※2)$$

よって，$\{f(x)\}^2=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}x^n=e^{2x}$

従って，$f(x)=e^x$

ここで，$f(x)$ の定め方から a_n は x^{n-1} の係数として表れることに注意しましょう。

$h(x)=e^x$ として，マクローリン展開すると，

$h^{(k)}(0)=1$　となり，x^k の項だけ取り出すと，

$$\frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k=\frac{1}{k!}x^k$$

よって，一般項 a_n は

$$a_n=\frac{1}{(n-1)!}$$

となります。

ここで，解法中の (※1) と (※2) を解説します。

【※1】母関数 $f(x)$ の定め方

初項が a_1 であることから，$f(x)$ の定め方として x^0 の係数に a_1，x^1 の係数に a_2，…とずれていくことが分かるので，

$$f(x)=a_1x^0+a_2x^1+a_3x^2+\cdots$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k+1}x^k=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^{k-1}$$

となります。

【※2】 $\{f(x)\}^2$ を考える必然性

問題文にある

$$\frac{2^n}{n!}=\sum_{k=1}^{n+1}a_ka_{n+2-k}\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

の a の添え字は足すと k によらず一定であり $n+2$ になっている。このことから，(A) は添え字の和が $n+2$ になるように定められていると考えられます。

ここで，$f(x)$ を 2 乗することで x^n の係数にまさに (A) が表れ，置き換えられることで $f(x)$ が別表示を得るわけです。

§3．練習問題

【練習 1】 一次分数型

漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n-9}{a_n-5}$，$a_1=8$ を解け。

●ヒント：$\alpha=\dfrac{\alpha-9}{\alpha-5}$ より $\alpha=3$ (重解) となりますが，本稿で紹介した解法は“比をとる”ものではないので心配無用です。

○答：$a_n=\dfrac{15n-31}{5n-7}$

【練習 2】

次の条件で定まる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

$$c_0=1,\ c_n=c_0c_{n-1}+c_1c_{n-2}+\cdots+c_{n-1}c_0\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

●ヒント：各項の添え字を足してみると一定になっていることが分かる。そのことから，$f(x)$ を

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}+c_nx^n+\cdots$$

と定め，$\{f(x)\}^2$ の x^n の係数に着目する。

○答：$c_n=\dfrac{1}{n+1}{}_{2n}\mathrm{C}_n\quad\left(f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right)$

(注意) c_n はいわゆる Catalan 数である。

【練習 3】 横浜国立大学 (2000)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0=1,\ a_n=\sum_{k=1}^{n}3^ka_{n-k}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問に答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 をそれぞれ求めよ。

(2) a_n を求めよ。

●ヒント：問題文において 3^k があることから，

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$$

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}3^kx^k\left(=\frac{1}{1-3x}\right)$$

と定め，掛け合わせ丁寧に整理することで $f(x)$ を書き換える。

○答：$a_n=3\cdot6^{n-1}\ (n\geqq1)\quad\left(f(x)=\dfrac{1-3x}{1-6x}\right)$

川崎 真澄 かわさき ますみ

東京都生まれ。東京理科大学理工学部数学科卒業。埼玉大学理工学研究科修了。専攻は代数幾何学。博士（理学）。現在，私立海城学園数学科主任。趣味は古典芸能鑑賞。

城島 智子 じょうじま ともこ

東京理科大学数学科卒業
東京理科大学大学院　修士終了
現在，海城学園非常勤講師

Message

秘伝の授業技を開発する

～指導ネタの蓄積を～

岡山県立
岡山朝日高等学校
山川 宏史
Hiroshi Yamakawa

1．はじめに

新テストが近づいた。平素の授業で生徒にいかに本気で考えさせるかは非常に重要であることに変わりはない。特に数学においては，定義を天下り的に教えることは多いが，定理・公式や問題の解法などは，良い教材を用いて指導者が生徒に良い刺激を与えることが重要であると筆者は日頃から考えている。もっとも定義に至っても，なぜそのように定義するのかや，定義可能 (well defined) の理由や歴史的背景まで導入時に教科書レベルを超えて教えるよう日夜研究している。今回，機会を与えられたので，有効な指導法・発問の工夫について考察した。生徒のやる気の喚起が必要条件である。

2．因数分解公式を因数分解の方法で証明させる

数学 I の多くの教科書に，展開・整理の結果が

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$

となる問題が掲載されている。これなら，数学 I の展開の練習として許容範囲である。しかし，現場では「いずれは必要となるから，因数分解の公式として覚えるように」と指導することが多い。展開して正しいことが証明できれば，因数分解公式として認められるが，一歩踏み込んで因数分解を考えさせるとよい。ただし，ノーヒントでは厳しいので

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$$

の恒等式を事前に教えておき，これは重要公式ゆえ暗記するよう指導しておく。しばし待ちながら状況に応じヒントを数行板書していくと，正解者が挙手してくれたり，机間巡視で正解者が見つかる。(解法略)

3．Σ 2 乗公式の簡単な証明方法を考えさせる

数学 B の教科書には，Σ 公式が掲載されているが

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

の証明は，3 乗の展開公式から得られる恒等式を基に，延々と計算がされている。そこで，「これを暗算でできる方法は？」と生徒に発問してみる。十数分待つと，次のような解答を導いた生徒がいた。

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\}$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\{(k+2)-(k-1)\}-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\{-(k-1)k(k+1)+k(k+1)(k+2)\}-\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{n}{3}(n+1)(n+2)-\frac{n}{2}(n+1)$$
$$=\frac{n}{6}(n+1)\{2(n+2)-3\}$$
$$=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

この生徒を褒めちぎったのは言うまでもないが，残念ながら正解者が出なかったクラスでは，こちらで解答の3行目までを板書して，残りは生徒に考えさせた。次に，生徒の多くがこの解法に納得した後で

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

の証明を暗算でする方法を発問すると，同様な考え方の計算により，クラスの数名の生徒が正解した。実際には暗算可能レベルである。

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^3&=\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)k(k+1)+k\}\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}(k-1)k(k+1)\\&\qquad\times\{(k+2)-(k-2)\}+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\{-(k-2)(k-1)k(k+1)\\&\qquad+(k-1)k(k+1)(k+2)\}+\sum_{k=1}^{n}k\\&=\frac{n}{4}(n+1)(n-1)(n+2)+\frac{n}{2}(n+1)\\&=\frac{n}{4}(n+1)(n^2+n-2+2)\\&=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\end{aligned}$$

実は，このネタは優秀な生徒の指摘を受けて，最近から指導に取り入れてみた実践例である。2乗公式，3乗公式ともに正解を聞いた多くの生徒から感嘆の声が上がった。教科書にはこのような変形が掲載されていないし，塾などでもこのようなことは聞かないからである。「学校に来て良かったな」と締めくくると，生徒は歓喜した。この技は，一般項を階差型に変形することにより，非常に楽に和を求めることができるスーパー解法に一般化され，大学入試などにも形を変えて出題されるので，有効である。

4．部分分数分解の妙技を考えさせる

数学Bの教科書には，分数和を求める便利な道具として，部分分数分解が掲載されている。

恒等式

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

が与えられ(もしくは証明され)，和を求める例題になっている。続いて，問いや練習として

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$$

などを求める問題がある。しかし，一般的な

$$\frac{1}{k(k+a)}=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\quad(a\neq 0)$$

の形で掲載されている教科書がないのは誠に残念。せめて，啓林館詳説シリーズだけでも，一般的な形を掲載するとよいかと。授業では，この恒等式の左辺だけを板書して生徒に右辺を考えさせ，証明させることにしている。その際，近所の席の者同志での合議制も認めている。しばらく待つと，多くの生徒から手が挙がったり，互いに相手を認め，和やかな雰囲気となる。

さらに，分母が3個版の

$$\begin{aligned}&\frac{1}{k(k+1)(k+2)}\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\end{aligned}$$

を証明させるときにも，はじめはノーヒントで，生徒に自由に考えさせることにしている。しばらく待った後で挙手させ発言させている。なお，理系クラスにおいては，右辺を与えないほうがより生徒のためになる。学年に何名かの生徒は，ノーヒントで次の解法に到達した。

$$\begin{aligned}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}&=\frac{1}{(k+1)}\cdot\frac{1}{k(k+2)}\\&=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)\\&=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}\end{aligned}$$

真ん中の項を括り出す技がポイントで，身近な例で「3人兄弟では真ん中の子が先頭に立つ勇気を」と教えると，生徒は喜び定着する。筆者の場合もそうであった。この変形により

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

を求めさせる問題を考えさせるとより効果的。入試対策問題集にはこの問題が収録されているが，習ってすぐの授業で扱うと，生徒の刺激になり非常に面白い。さらには，校内試験で発展的な類題

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$$

をBonus問題（素点に$+\alpha$で加点）で出題してみると，優秀な生徒が本気で取り組んでくれて，理系クラスでは数名の生徒は完解した。満点を超えた生徒は満点で評価を。完解が不可能でも，配布された模範解答を読むと生徒は感嘆していた。中央の2つの項を括り出すことが肝要で，これは個数が増えても可能に。この応用例は，数学Ⅲの積分で次の如く大活躍し，積分計算が暗算レベルに。生徒は大喜びをする運命に。これぞ裏技計算。

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2(x+1)}&=\int\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x(x+1)}dx\\&=\int\left\{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x(x+1)}\right\}dx\\&=\int\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right)dx\\&=-\frac{1}{x}+\log\left|\frac{x+1}{x}\right|+C\end{aligned}$$

5．定数係数2階線型常微分方程式の高校生版解答

数学Ⅲの教科書には，微分方程式が掲載されているが，変数分離型を教えて教科書の問題を演習した後で

$$y''-5y'+6y=0$$

を板書して，一斉に生徒に考えさせる。ただし，使用する道具として

$$y'=ky\quad\Rightarrow\quad y=Ae^{kx}$$

も板書しておき，他分野の知識も用いてよいことを注意しておく。十数分くらい待っていると，学年で数名の生徒は次のような正解を導いた。

$$y''-2y'=3(y'-2y)$$

より，$y'-2y=Ae^{3x}$

$$y''-3y'=2(y'-3y)$$

より，$y'-3y=Be^{2x}$

辺々引くと，$y=Ae^{3x}-Be^{2x}$

最後の符号は＋に直すよう指導して完了。生徒は，友人が斯様なアイディアを出したことに感激し，ますますお互いを認め合う仲に。考えさせている最中に，机間巡視や適度なヒントを与える配慮も。この解法は$y''+ay'+by=0$，$D>0$に拡張可能。さらに，特性方程式が重解をもつ場合も次の問題で考えさせた。やはり，予想通り学年で数名は正解を捻り出した。

$$\begin{aligned}&y''-6y'+9y=0\\&y''-3y'=3(y'-3y)\end{aligned}$$

より，$y'-3y=Ae^{3x}$

$$\begin{aligned}&e^{-3x}y'-3e^{-3x}y=A\\&(e^{-3x}y)'=A\end{aligned}$$

よって，$e^{-3x}y=Ax+B$

$$y=(Ax+B)e^{3x}$$

漸化式では，$a_{n+1}=pa_n+q^n$型は両辺をq^{n+1}で割ることに相当する。特性方程式が虚数解をもつ場合には，気が向けばEuler's formulaを用いることだけを述べて終了することにしている。当然，三角関数が登場する。合議制での解答は厳しい。やはり，数学は個人で悶々と考えることに。なお，大学で使用するテキストには，このような解答は掲載されていない。特殊解を天下り的に与え，その線型結合も解というストーリーで。別分野の解法が利用できる点で斬新なアイディアと思われるが，実は関数列と解釈すると納得がいく。すなわち

$$f_0(x)=y,\ f_{n+1}(x)=\frac{d}{dx}f_n(x)$$
$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

により関数列を定義すると，問題は隣接3項間漸化式そのものに。ただし，着地点は大きく異なる。余談であるが，他県で数学教育の講演会を依頼されると，このネタをご披露することが多い。現場の先生方は最初身構え厳しい顔をするが，解法があまりに簡単ゆえ，大喜び。しかし，この関数列という発想は先生方にも厳しいようである。実はこの関数列アイディアは近年発見したばかりの新ネタである。

6．長期間にわたる思考力養成指導

2年生理系の最初の授業で次の方程式を板書することがある。

$$x^3-3x+1=0$$

因数定理は履修済みゆえ，生徒は因数分解が厳しいことはすぐにわかる。これは難問であると認識して，式を暗記，四六時中考えることに。三角関数の履修後

$$x=r\cos\theta \quad (0\leqq\theta<2\pi)$$

の置き換えに気がつく者も出てくる。さらに微分法を履修すると，グラフから $r=2$ とわかり，完解できる。これぞ長期間にわたる思考問題の典型例かと。

$x=2\cos\theta$ を左辺に代入して，

$$8\cos^3\theta-6\cos\theta+1=0$$

$$2\cos 3\theta=-1$$

$0\leqq 3\theta<6\pi$ より，

$$3\theta=\frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{8\pi}{3},\ \frac{10\pi}{3},\ \frac{14\pi}{3},\ \frac{16\pi}{3}$$

$$\theta=\frac{2\pi}{9},\ \frac{4\pi}{9},\ \frac{8\pi}{9},\ \frac{10\pi}{9},\ \frac{14\pi}{9},\ \frac{16\pi}{9}$$

このうち，重複するものを除くと，

$$x=2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{4\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9}$$

【オマケの別解】

$u^3+v^3=-1$，$uv=1$ となる複素数 u，v があれば

$$x^3-u^3-v^3-3x(-u)(-v)=0$$

となるから，この左辺は因数分解できて

$x=u+v$ を解にもつことになる。

$u^3v^3=1$ であるから，u^3，v^3 は $t^2+t+1=0$ の2解である。

$u^3=\omega$，ω^2 になるが，条件をすべて鑑み，

$u=z$，$v=\bar{z}$ などがある。

ほかの組も探して

$$x=2\cos\frac{2\pi}{9},\ 2\cos\frac{8\pi}{9},\ 2\cos\frac{14\pi}{9}$$

$$\left(\frac{2\pi}{3}\ \text{の差が格好良い}\right)$$

これは，3次方程式の一般的解法。

Gerolamo Cardano (Italy 1501～1576) が世に紹介した。

7．演習授業での生徒発表システム

1年次から問題演習の時間には，板書した生徒に黒板でクラスの仲間に対して発表をさせるようにしている。教科書本文の問いや練習はこちらが説明するが，教科書節末・章末問題などの比較的高度な問題を板書した生徒に「できれば，前で説明もしてもらいたい」と促している。無理な生徒には拒否権も認めている。さらに，聴衆には「板書ミスも含めてよく聞くように」と促している。他人にわかるように説明できることは，自分が本当に理解しているかどうかのバロメーターであるが，他人のミスを目敏く発見する力は，自分のミスを防ぐ力にもなるからである。これにより，反応力・瞬発力が育まれる。発表者には，聴衆を指名する権利を，聴衆には質問をする権利を与えている。さらに，私から評価や感想も。楽しい授業に。

【発表者に生徒が聞き入る一場面】

【発表者を褒めちぎる一場面】

8．おわりに

近年，アクティブ・ラーニングが叫ばれているが，数学は指導のしかたによっては，それが大いに可能な教科である。新課程の情報を素早く掴み対応策を練っておくことも重要であるが，授業でうまく使える良い教材を普段から探しておくことは最重要である。例えば，昨年7月発表された新課程の学習指導要領解説には，四平方の定理が課題学習の具体例として紹介されている。実は，偶然にも直前に1学期期末考査の Bonus 問題に出題したばかりであった。比較的易しい問題ゆえ，生徒が喜んで取り組み，正解者は多数。また，今回ご紹介した実践例も年々変化しており，私もまだまだ発展途上人。読者の皆さんとの情報交換ができれば幸い。

9．番外編　「数学は24時間いつでもできる！」

今では，日本に滅多になくなった補習科（校内に予備校）の授業を担当する機会がしばしばある。補習科の最初の授業で「数学は24時間いつでもできる！」と宣言することにしている。考えるテーマがあれば，計算用紙など不要。優れた解法の探索と暗算でできる程度の計算なら，別のことをしながらでも考えることができるし，その能力を育成することは思考力の大幅な進歩につながる。実際に補習科では逆三角関数の微積分や双曲線関数の微積分も教えている。例えば

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}$$

と定義すると

$$\frac{d}{dx}\sinh x=\cosh x,\quad \frac{d}{dx}\cosh x=\sinh x,$$

$$\cosh^2 x-\sinh^2 x=1$$

である。

$I=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ を求めるには，

$x=\sinh t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\cosh t$

$$I=\int\frac{\cosh t\,dt}{\sqrt{\sinh^2 t+1}}$$

$$=\int dt \qquad (\cosh t>0\ \text{より})$$

$$=\log(x+\sqrt{x^2+1})+C$$

$x=\tan\theta$ とおいた場合と比較していただければ計算がほぼ暗算レベルに。

同様な計算は，$\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$ についても $x=\cosh t$ とおくと可能。こちらで素材は準備するにしても，計算そのものは生徒にさせるべきかと。こちらで先走って模範的計算をして見せるべきではない。このネタも県外で講演会の際に，先生方に実値計算をすると大好評。目から鱗のようだ。

写真は恒例の年末補習科餅つき大会の一場面であるが，餅米を捏ねたりついたりすることを生徒に教えながら，実は頭の中で翌月から始まる2次直前指導の構想を練っていた。候補となる難関大学の最近の入試問題をいかようにアレンジするかなど，悩みは多い。ただし，口先では生徒と「2の10乗は？3の10乗は？4の10乗は？」などと問答していた。生徒は素早く「1024，59049，1048576」と答えていたことは言うまでもない。

【補習科餅つき大会の一場面】

超難関大学への合格のためには，特殊な訓練が要求されることも多い。指導する側が日夜研究することが最重要であり，指導者の個人的な力量の差が如実に出るであろう。それゆえ，教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。皆さん，お互いに謙虚に切磋琢磨いたしましょう。なお，本論文のスーパー解法は，すべて筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により，暗算能力は格段に進歩することができた。最後になりましたが，読者諸賢のご精読と発表の機会をくださった啓林館に感謝します。さて，次はどこへ出かけるかな。何があるか，楽しみやな。

E-mail：yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献

[1]　文部科学省「高等学校学習指導要領解説 数学編」平成 30 年 7 月

[2]　山川宏史「新課程入試の特徴」2016 年 11 月 フォーカスゴールド通信第 13 号　啓林館

[3]　山川宏史「沖縄県教員指導力向上プログラム」2018 年 8 月 11 日配付資料

[4]　山川宏史　　膨大なデータベース，休日遠距離ロードにおける珠玉の思考

―― 知が啓く。――
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

本　　社　〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番25号　TEL(06)6779-1531　FAX(06)6779-5011
東京支社　〒113-0023 東京都文京区向丘2丁目3番10号　TEL(03)3814-2151　FAX(03)3814-2159
北海道支社　〒060-0062 札幌市中央区南二条西9丁目1番2号サンケン札幌ビル1階　TEL(011)271-2022　FAX(011)271-2023
東海支社　〒460-0002 名古屋市中区丸の内1丁目15番20号ie丸の内ビルディング1階　TEL(052)231-0125　FAX(052)231-0055
広島支社　〒732-0052 広島市東区光町1丁目7番11号広島CDビル5階　TEL(082)261-7246　FAX(082)261-5400
九州支社　〒810-0022 福岡市中央区薬院1丁目5番6号ハイヒルズビル5階　TEL(092)725-6677　FAX(092)725-6680

20190301