啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

フォーカスゴールド
Focus Gold 通信

p.2-16 ［多面的に探る］

◆ 大学入試共通テスト（新テスト）に向けた考例と道標（その2）

東山中学・高等学校　鶴迫貴司

◆ About Manhattan distance

岡山県立岡山朝日高等学校　山川宏史

◆ 多面的に探る問題実践例

中央大学　藤田岳彦

特集 p.17-20

おせっかいな問題集「ATLS」とは?
～開発者に聞く～

vol.16

多面的に探る

大学入学共通テスト（新テスト）に向けた考例と道標（その 2）

東山中学・高等学校　鶴迫 貴司

1．はじめに

昨年の 2017 年 11 月にも試行調査が行われましたが，その試行調査に関しては，試験会場は高校で行われ，普段から面識のある先生方が試験監督にあたられていました。今年の試行調査は約 2 年後のことを鑑みてか全国の大学などを会場にして，受験本番さながらの様子を想定した上で行われ，センター試験と同様に大学の先生方をはじめ，その機関に関わるスタッフが主に試験監督をされていました。

現行のセンター試験も残すところ 2 回となりましたが，そのセンター試験ですらどちらかというと，試行調査に近いような傾向にシフトしている問題も存在するのではないかと個人的には感じています。

例えばですが，

■18’センター試験　数学ⅡB　第 1 問［1］⑴（配点 1 点）■

> 1 ラジアンとは，$\boxed{\text{ア}}$のことである。
> $\boxed{\text{ア}}$に当てはまるものを，次の⓪～③のうちから一つ選べ。
> ⓪　半径が 1，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
> ①　半径が π，面積が 1 の扇形の中心角の大きさ
> ②　半径が 1，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ
> ③　半径が π，弧の長さが 1 の扇形の中心角の大きさ

この **18’センター試験数学ⅡB** においての初問が，上記の出題でしたが，結論から言うと，

配点が 1 点で良かった（救われた！）

と思った受験生がもしかすると存在したかもしれません。定義の理解と把握がないためか，正答率は思ったよりも高くはなかったようです。しかし，これに続く

⑵の「144° は何ラジアン？」「$\frac{23}{12}\pi$ ラジアンを度で表せ」

は正答率が高いのは，数学的な定義が最も大切であるという認識はなく，むしろドリルレベルで培った問題などに正解しているといえる状況です。使い方は間違っていませんが，その中身（定義）については全くもって無頓着な状態である可能性が高いかもしれません。これはパターン学習をし過ぎることによって生まれた現象の 1 つと捉えることができますが，**大学入学共通テスト（試行調査含む。以下新テスト）**でも数学の定義を駆使して，諸々の定理や性質が生まれるということを問いたいがために，そのような設問が用意されるとなると，ドリル演習やパターン学習だけでの対応は不十分な状況になる可能性が高いものと言えるのではないでしょうか。

一般的には，

① **教科書の読解**
② **定義の理解と把握**
③ **ドリルレベルの演習**
④ **定義の応用と性質や定理（公式）の証明とその導出**
⑤ **性質や定理（公式）の運用（どの場面で威力を発揮するのか）**
⑥ **新たな性質などを探究する**

が「**学び**」の基本的な流れかと思いますが，飛ばし飛ばしで①→③→⑤や③→④などで完結した気分でいると，それこそ**新テスト**が求めている学力観や探究する素地は養えないことがこの問題からも少しではありますが伺えるかと思います。

またセンター試験では，選択する問題によって若干の差はありますが，数学ⅠA で約 35 問～45 問，数学ⅡB においてもほぼ同数の出題です。これは**新テスト**でもほぼ同数と言ってもよいのではないのでしょうか。とはいうものの，問題によっては，計算のスピードやどの部分で躓いていしまう（失速する）のかは，個人差があるので何とも言えませんが，センター試験の過去問に取り組み，自己採点をする中でどの問題の配点もすべて 2 点ではないことに気が付いていることを鑑みると，それこそ配点の高い問題は大問の中においても要となる問題であることは否めません。そこで 2 次対策（個別試験という意味）でも小問に分かれている場合は，最後の問題を自分の頭の中で

誘導に乗らずに構想を立てて解き切る訓練

をしていることが，センター試験においても，最後の小問までたどり着くことができるかを左右する部分が多少存在するかと思います。点数をとることだけに集中した場合，できる限り得点の大きい（配点の高いという意味）問題を正解できるように取り組むことが先決なのかもしれませんが，それはある意味，2 次対策で培われた力が発揮できるということでもあり，**新テスト**でも一部の問題に限っては通用する部分かもしれません。つまり，センター試験が小問の中で用意している誘導問題に乗らなくても，最後の小問で問われていることを観ておきながら，自分で見通しが立てられる場合は，自分の考えに沿って正解を導いておくことが何よりも大切なことかと感じます。それができるようになると，途中の誘導問題（穴埋め部分）などが，自然と埋まっていくことにも繋がり，時間の短縮にもなるかもしれません。

一方で，誘導に乗ることも大切なことだと思います。センター試験では，誘導問題に乗って考えていく中，答えを導こうとした際に躓いた（失速した）場合は，それ以降にあるたくさんの未知数を各自で設定して，文章から与えられている情報を連立させてみるという手法が効果的な問題が一部ありましたが，**新テスト**となると，そのようなテクニック的な手法が使えない様に工夫されて設定している部分もあるため，普段から他人の考えに寄り添いながら，全く異なる手法で答えを導出していくことを経験しておくことは望ましい教育的配慮とも言えるのではないのでしょうか。そういう意味では，前号の FG 通信でも話をさせて頂きましたが，アプローチを変更してみて答えに辿り着けることができるかどうかの検証は，少なくとも講じておくべきことの一つと言えるのではないのでしょうか。

ところでセンター試験は，テクニックのオンパレードという観方もあるようですが，個人的にはそのようなところにスポットライトを当てる必要はないと考えています。少なくとも教科書に掲載されている定理・公式・性質は身に付けておくべきだと思いますが，それ以上のモノ（例えば，トレミーの定理，角の二等分線の長さの公式，凸四角形の面積公式，空間における三角形の面積公式，放物線と直線とで囲まれる面積の $\frac{1}{6}$ 公式などなど……）に関しては，最近の傾向では利用できる場面が減少していることも否めません。

さらに新テストでは，**思考力・判断力・表現力**を問うということが特に主張され，それを加味して出題すると言われていますが，実はこのベースには「**主体的で対話的で深い学びを促す**」という学習指導要領に基づいたテーマに沿って出題していることも大前提となっています。その部分を蔑ろにして，思考力・判断力・表現力などだけが先行してしまうと，それこそ学習指導要領に沿う形での出題はシステムとしても機能しなくなってしまう可能性があり，**知識や技能**を習得しているの

かさえ不透明な状況となります。

この秋に行われた試行調査を分析することも必要であり，今後も新テストに関する動向も気にかけておかなければなりませんが，これまでの試行調査のような出題がそっくりそのままということは一言も宣言されていないため，基本的な知識と技能を問うような出題も可能性としては含まれてくるかと個人的には感じています。

さて，フォーカスゴールドやフォーカスゼータ(以下FG，FZ)では，様々なアプローチが成せるよう多種多角的に問題を分析するのとともに，生徒の皆様にとって，数学的な概念を含め自学自調できる素地を存分に感じ取れるような配慮を施し編集と構成がされています。FG，FZでは本解答に掲載することから補足説明や別解まで，少しでも学ぶ者にとって躓きポイントが生まれないように編集され，**新テスト**に向けた内容にも踏み込み，さらに新テスト後に受験する国公立大2次試験や私立大個別試験にも対応できるようになっています。これは，FG 4th Editionでも新たに加筆された部分が多々ありました。我々現場の教員は少なからず，教科書，問題集，参考書，各自で作成したプリントなどを駆使しながら，数学的な内容と観点を生徒に伝えながらも，生徒一人一人の進路に応えることができるような力を提供しなければならない存在であることは言うまでもありません。一方で，新テスト特有に対応する力(求められる力)として様々な言葉(例えば，思考力，表現力，判断力，情報収集編集力など)が存在しますが，これはこれまでと同様なことが多いのも事実でありながら，実際にそれらをどのように身に付けるかはこれからの課題であります。しかし，新テスト用に開発され具現化されたものは未だ数が少ないと思います。そこで今回，それらの力をどのように身に付けていくのかを考究する(有機的な繋がりを持たせ，一題で複数のアプローチができるように作問するという意味です)機会を与えて頂きましたので，FGとFZを用いて，新テスト対応の問題を作成してみました。と同時に今後の学習においても，様々な力を身に付けそして工夫できるような素材をここに述べさせて頂きたいと思います。ただし，公表された試行調査の各問題の問題文(設問や資料を含む)はとても長く，いきなりあのようなレベルを提供するのではないことをご了承下さい。あくまでもFG，FZを参考にして文章は短くても新テスト対応への道標であることを念頭において頂ければ幸いです。

まずは，FGやFZにおいて，

FGⅠA：P.39，P.52，P.164，P.167，
P.170，P.180 37，P.619 11
FGⅡB：P.104，P.121
FZⅠA：P.39，P.59，P.92，P.218，P.220
FZⅡB：P.86

を参考にして，次のようなサンプル問題を作問しました。ここでは「**複2次式**」「**2次方程式の解の存在範囲**」「**2重根号**」にスポットライトを当ててまとめています。

〔サンプル問題(その1)〕

「**複2次式**」に関する授業後，たかしさんとしんごさんは，次のような会話をしています。

以下の ア ～ タ に当てはまる数を答え，記述欄 あ ， い には k を用いた簡潔な不等式を1つ答えよ。

たかしさん：ねぇ。今日の授業で出された「複2次式」の宿題を一緒にやろうよ。
しんごさん：そうだね。
たかしさん：宿題を先にやろうよ。そういえば先生は，次のような式のことを複2次式とよんでいたよね。

> a，b，c を実数の定数とするとき，
> ax^4+bx^2+c の形で表される式
> のことを x に関する複2次式とよぶ。ただし，$a\neq 0$ とする。

しんごさん：そうだね。宿題では，この複2次式に関する因数分解のことや，それ以外でも2次関数や2次方程式に関する問題があったよね。
たかしさん：そうだね。まずは因数分解の**宿題①**をやろうよ。
しんごさん：そうしよう。

■宿題①■

> 次の複2次式を因数分解しなさい。
> (i) x^4-13x^2+36
> (ii) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$
> (iii) x^4+64

たかしさん：先生は，与えられた式が複2次式であるときには，$x^2=t$ と置き換えをすれば，これまでの因数分解と同じように扱えると話をしていたよね。
しんごさん：そうだね。そんなことも言っていたね。だったら，**宿題①**はすぐにできそうだね。やってみると，次のようになるよね。

(i) x^4-13x^2+36
$=(x-\boxed{ア})(x+\boxed{ア})(x-\boxed{イ})(x+\boxed{イ})$
$\boxed{ア}<\boxed{イ}$

(ii) $4x^4-17x^2y^2+4y^4$
$=(x-\boxed{ウ}y)(x+\boxed{ウ}y)$
$\times(\boxed{エ}x-\boxed{オ}y)(\boxed{エ}x+\boxed{オ}y)$

(iii) x^4+64
$=(x^2-\boxed{カ}x+\boxed{キ})(x^2+\boxed{カ}x+\boxed{キ})$

たかしさん：僕もそうなったよ。これで一安心だ。
しんごさん：次の**宿題②**は2次関数と2次方程式の話だね。早速，やってみようか。

■宿題②■

> $f(x)=x^2-2kx+2k^2-2k-3$ について，次の問いに答えよ。
> ただし，k は実数の定数とする。
> (iv) $y=f(x)$ の頂点の座標を求めよ。
> (v) 方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもち，1つの解が正でもう一つの解が負であるための定数 k のとり得る値の範囲を求めよ。
> (vi) 方程式 $f(x)=0$ が少なくとも1つの正の実数解をもつとき，定数 k のとり得る値の範囲を求めよ。

たかしさん：(iv)についてだけど，$y=f(x)$ の頂点の座標は，
$(k,\ k^2-\boxed{ク}k-\boxed{ケ})$
だよね。
しんごさん：そうだね。次の(v)についてだけど，これは結局，$\boxed{コ}$ が成り立てばよいよね。

$\boxed{コ}$ の【選択肢】

⓪ $f(1)>0$	① $f(1)<0$
② $f(0)>1$	③ $f(0)<1$
④ $f(0)\geqq 0$	⑤ $f(0)\leqq 0$
⑥ $f(0)>0$	⑦ $f(0)<0$

たかしさん：そういうことだね。ということは，これを利用して k について解くと，定数 k のとり得る値の範囲は不等式で $\boxed{あ}$ と表されるよね。
しんごさん：そうだね。次の(vi)は「少なくとも1つの正の実数解」に気を付けて，これもに k ついて解くと，定数 k のとり得る値の範囲は不等式で $\boxed{い}$ と表されるよね。
たかしさん：なるほど。では最後の**宿題③**もこのまますすめようか。
しんごさん：そうだね。

■宿題③■

> x に関する方程式
> $x^4+ax^2+4=0$ ……(※)
> に対して，この方程式が相異なる4つの実数解をもつとき，次の問いに答えよ。
> (vii) 定数 a のとり得る値の範囲を求めよ。
> (viii) 実数解のうち最も小さい実数解を a を用いて表せ。

たかしさん：この方程式は複2次式だから，先生が言っていたように置き替えしてみる？
しんごさん：そうだね。$x^2=t$ とすると，方程式（※）は t に関する2次方程式となるから，この t に関する2次方程式が $\boxed{サ}$ をもつときに，方程式（※）は相異なる4つの実数解をもつことになるよね。

$\boxed{サ}$ の【選択肢】
⓪　異なる2つの実数解
①　2つの正の実数解
②　異なる2つの正の実数解
③　2つの負の実数解
④　異なる2つの負の実数解
⑤　正の実数解と負の実数解

たかしさん：なるほど。そういうことか。つまり，(vii)について，定数 a のとり得る値の範囲は $a<\boxed{シス}$ となるよね。
しんごさん：そうだね。最後の(viii)だけど，その相異なる4つの実数解で最も小さい実数解 x は
$$x=-\frac{\sqrt{-a-\boxed{セ}}+\sqrt{-a+\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$$
と表せたけど，これで大丈夫かな。
たかしさん：しんご君の答えがそうなったんだから，たぶん大丈夫だと思うよ。明日の授業で先生が解説してくれるだろうから，そのときまで楽しみにしていようよ。

いかがでしょうか。ここでは解答は省略しますが，このように，FG や FZ に載っている問題を利用して，作問することができました。

2．サンプル問題（その2）

では前号の最後に提供させて頂きましたサンプル問題（その2）の解説をさせて頂きますが，**新テスト**ではこれらの問題がどの程度機能するかはわかりません。ただ，諸々の問題をじゃんけんの問題として捉えた際に，パターン学習で培った力をもち備えておくと時間の短縮に繋がったり，一方で，じゃんけんの問題を「部屋に入る場合の数」というように捉え，すなわち，**分配問題**として捉えておくことは基礎・基本的なことだと個人的には感じていますので，それらを含めて説明をさせて頂きます。なお，このサンプル問題（その2）につきましても，

FG I A：P.336，P.338，P.341，P.351，P.387
FZ I A：P.334，P.338，P.340，P.353，P.385

などを参考にして作問いたしました。

〔**サンプル問題（その2）**〕
たかしさんとしんごさんは次のような会話をして，文字列を作ろうとしています。$\boxed{ア}$～$\boxed{ネ}$ には最適な数値を，また $\boxed{あ}$，$\boxed{い}$ には，選択肢の中から最適なものをそれぞれ選べ。

たかしさん：大学入試センターを英語で表現すると National Center for University Entrance Examinations みたいだけど，この頭文字の一部の N，C，U を使って遊ぼうよ。
まず N，C，U を1つずつ使って3個の文字を横一列に並べてできるのは $\boxed{ア}$ 通りになるね。
しんごさん：じゃあ N，C，U を1つずつ使って3個の文字を円形に並べてできるのは $\boxed{イ}$ 通りになるね。
たかしさん：では，N，C，U の同じ文字を何回も書いてもよいとして，3個の文字を横一列に並べてできるのは $\boxed{ウエ}$ 通りになるね。
しんごさん：そうだね。じゃあ N，C，U の同じ文字を何回も使ってもよいとして，3個の文字を円形に並べてできるのは $\boxed{オカ}$ 通りになるね。

このような会話の後，二人は**横一列**に並べてできる文字列について考えはじめた。

たかしさん：では N，C，U の同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5文字を書いたとき，全部で $\boxed{キクケ}$ 通りになるよね。
しんごさん：そうだね。そこで同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5文字を書いたときに，N，C，U のすべての文字が書かれている確率は $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}$ となるね。
たかしさん：そうか。この確率 $\dfrac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}$ は，5人でじゃんけんを1回したときに，あいことなる確率 $\dfrac{\boxed{セソ}}{\boxed{タチ}}$ と比べて，$\boxed{あ}$ と言えるね。

【$\boxed{あ}$ の選択肢（以下の中から最適なものを1つ選べ）】
⓪　小さい　　①　大きい　　②　等しい

しんごさん：そのように捉えると面白いね。じゃあ，同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5文字を書いたときに，NCU という文字列が書かれている確率は $\dfrac{\boxed{ツ}}{\boxed{テ}}$ となるから，この確率の3倍は $\boxed{い}$ と言えるね。

【$\boxed{い}$ の選択肢（以下の中から最適なものをすべて選べ）】
⓪　2人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい
①　2人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい
②　3人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい
③　3人でじゃんけんを1回して，2人が勝つ確率に等しい
④　3人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい
⑤　4人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい
⑥　4人でじゃんけんを1回して，2人が勝つ確率に等しい
⑦　4人でじゃんけんを1回して，3人が勝つ確率に等しい
⑧　4人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい

たかしさん：そうだね。面白いね。ではそろそろ最後にしよう。同じ文字を何回も使ってもよいものとして，7文字を書いたときに，NCU という文字列が1回書かれている確率は $\dfrac{\boxed{トナ}}{\boxed{ニヌネ}}$ となるね。
しんごさん：そうだね。もうおしまいにしよう。

解答
N，C，U を1つずつ使って3個の文字を横一列に並べてできる総数は
$3!=6$（通り）　答
である。

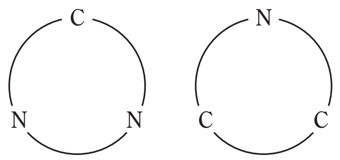
次に，N，C，U を1つずつ使って3個の文字を円形に並べてできる総数は
$(3-1)!=2!=2$（通り）　答
である。

そして，N，C，U の同じ文字を何回も書いてもよいとするとき，3個の文字を横一列に並べてできる総数は
$3^3=27$（通り）　答
である。

また，N，C，U の同じ文字を何回も使ってもよいとして，3個の文字を円形に並べてできる総数は

(I)　N，C，U のすべてを1つずつ使うときは，
上述の
2通り
である。

(Ⅱ) N，C，Uの中から2つを選ぶとき，例えば「N，N，C」または「N，C，C」のとき，



のように，それぞれ1通りずつとなるので，結局，

$_3C_2\cdot 2=6$（通り）

である。

(Ⅲ) N，C，Uのどれか1つの文字を3回とも書くとき，それは1通りしかないから，

$_3C_1\cdot 1=3$（通り）

である。

よって，以上の(Ⅰ)〜(Ⅲ)の考察により，求める場合の数は，

$2+6+3=11$（通り） 答

となる。

次に，**横一列**に並べてできる文字列について考えはじめたことについて，N，C，Uの同じ文字を何回も使ってもよいものとし，5文字を書いたとき，全部で

$3^5=243$（通り） 答

ある。

そこで，5文字を書いたときに，N，C，Uのすべての文字が書かれている確率というのは，

全体	$3^5=243$
1種類	3
2種類	$_3C_2\cdot(2^5-2)=3\cdot 30$
3種類	$243-3-90=150$

の表から得られるので，求める確率は

$\frac{150}{243}=\frac{50}{81}$ 答

となる。

一方で，5人でじゃんけんを1回したときにあいことなる確率とは，上記の表から考えると，ある意味「出た手の種類が1種類」または「出た手の種類が3種類」の場合であるから，

$\frac{3+150}{243}=\frac{51}{81}=\frac{17}{27}$ 答

したがって，明らかに5人でじゃんけんを1回したときにあいことなる確率の方が大きいと言えるから，$\boxed{\text{あ}}$の選択肢から選ぶと，⓪ 答

さて，5文字を書いたときに，NCUという文字列が書かれている確率を求めるには，NCUという文字列が存在するのは

「N C U ○ ○」，「○ N C U ○」，「○ ○ N C U」

の場合が考えられる。

ということは，上記の○には同じ文字を書いてもよいから，3通りの文字を書くことができるので，

$3^2\times 3=27$（通り） 答

よって，この5文字を書いたときに，NCUという文字列が書かれている確率は

$\frac{27}{243}=\frac{1}{9}$ 答

である。そこで，この確率の3倍は $\frac{1}{3}$ となるから，$\boxed{\text{い}}$の選択肢を調べると，

⓪ 2人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい：$\frac{_2C_1\cdot{}_3C_1}{3^2}=\frac{2}{3}$ ×

① 2人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい：$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ ○

② 3人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい：$\frac{_3C_1\cdot{}_3C_1}{3^3}=\frac{1}{3}$ ○

③ 3人でじゃんけんを1回して，2人が勝つ確率に等しい：$\frac{_3C_2\cdot{}_3C_1}{3^3}=\frac{1}{3}$ ○

④ 3人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい：$1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ ○

⑤ 4人でじゃんけんを1回して，1人が勝つ確率に等しい：$\frac{_4C_1\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27}$ ×

⑥ 4人でじゃんけんを1回して，2人が勝つ確率に等しい：$\frac{_4C_2\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{2}{9}$ ×

⑦ 4人でじゃんけんを1回して，3人が勝つ確率に等しい：$\frac{_4C_3\cdot{}_3C_1}{3^4}=\frac{4}{27}$ ×

⑧ 4人でじゃんけんを1回して，あいことなる確率に等しい：$1-\frac{4}{27}-\frac{2}{9}-\frac{4}{27}=\frac{13}{27}$ ×

したがって，①，②，③，④ 答

最後に，同じ文字を何回も使ってよいものとし，7文字を書いたときの全事象は3^7通りである。
また，この中でNCUという文字列が存在するのは

N C U ○ ○ ○ ○
○ N C U ○ ○ ○
○ ○ N C U ○ ○
○ ○ ○ N C U ○
○ ○ ○ ○ N C U

の場合が考えられて，○には3通りの文字を書き込むことができるから，この時点で

$3^4\times 5=405$（通り）

であるが，題意はNCUの文字列が1回書かれているということだから

N C U ○ N C U …… ★
○ N C U N C U
N C U N C U ○
N C U ○ N C U …… ★

は除かなければならないが，上記の★は並び方が重複しているから，どちらかを考えればよいので，従って，結局は405通りから

$3\times 3=9$（通り）

を除く必要がある。

以上より，7文字を書いたときに，NCUという文字列が1回書かれている確率は

$\frac{405-9}{3^7}=\frac{9(45-1)}{3^7}=\frac{44}{243}$ 答

となる。

$\boxed{\text{ア}}$：6　$\boxed{\text{イ}}$：2　$\boxed{\text{ウエ}}$：27　$\boxed{\text{オカ}}$：11

$\boxed{\text{キクケ}}$：243　$\frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{コサ}}}$：$\frac{50}{81}$　$\frac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{セソ}}}$：$\frac{17}{27}$

$\boxed{\text{あ}}$：⓪　$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$：$\frac{1}{9}$

$\boxed{\text{い}}$：①，②，③，④　$\frac{\boxed{\text{ヌネ}}}{\boxed{\text{トナニ}}}$：$\frac{44}{243}$

如何でしょうか。じゃんけんの問題と言われると，「**誰が勝つのか**」および「**何の手で勝つのか**」と捉えることは間違ってはいませんが，数学ⅠAの範囲に限ってしまうと，
「n人でじゃんけんを1回したときに，あいことなる確率」と問われると，この手法だと，「1人が勝つ」，「2人が勝つ」，……，「$(n-1)$人が勝つ」を考えてその総和を1から引くということになり，

$$1-\left(\frac{_nC_1\cdot{}_3C_1}{3^n}+\frac{_nC_2\cdot{}_3C_1}{3^n}+\cdots+\frac{_nC_{n-1}\cdot{}_3C_1}{3^n}\right)$$

$$=1-\left(\frac{_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_{n-1}}{3^{n-1}}\right)$$

のように表すことができます。がしかし，後項の括弧の中の分子については数学Ⅱで習得する**二項定理**の要素を含むために，数学ⅠAの範囲では利用できないことを鑑みると，じゃんけんの問題も**分配問題**として捉えておいて，

全体	3^n
出た手の種類が1種類	3
出た手の種類が2種類	$_3C_2\cdot(2^n-2)=3(2^n-2)$
出た手の種類が3種類	$3^n-3\cdot 2^n+3$

「n人でじゃんけんを1回したときに，あいことなる」状況とは，「出た手の種類が1種類」または「出た手の種類が3種類」を考えればよいので，求める確率は

$\frac{3+(3^n-3\cdot 2^n+3)}{3^n}=1-\frac{3(2^n-2)}{3^n}$

として捉えることと同じです。このように場合の数で習得した**知識や技術**と，数学Ⅱの二項定理で習得したことを**有機的に繋げていく題材**はこれ以外にも存在しますので，これらをベースにして多面的なアプローチが成せる問題に取り組むことが**新テスト**にも対応できる部分があるかもしれません。

それと選択肢が同じようなものだと，1つずつを精査するのはもちろん必要な問題もあるでしょうが，じゃんけんの問題くらいだと，「2人でじゃんけんを1回したときにあいことなる確率」や「3人でじゃんけんを1回したときにあいことなる確

率」は教科書や傍用問題集などでも扱っている内容だと思います。ドリルレベルでこれらの確率の値はひょっとすると身に付いている（覚えている）可能性があります。また，「4人でじゃんけんを1回したときにあいことなる確率」などを考えていく際には，「1人が勝つ」，「2人が勝つ」，「3人が勝つ」を考えていくと，それこそ式の**対等性（対称性）**の話や**余事象の活用**なども含めて身に付けている基礎・基本的な内容かと思いますので，同じような選択肢では時間の短縮に繋がることも含めて精度を上げておきたい部分も存在すると言えます。そういう意味ではドリル学習やある程度のパターン学習で身に付けておいた方がよいと感じる問題は授業の中でも外すことはできないものだと個人的には感じています。

3．新テストに向けて

センター試験では，すべての問題が穴埋め形式である以上，何を求めればよいのかが明確となっています。**新テスト**でも穴埋め形式の問題は存在しますが，これまでのセンター試験と異なるところは，その穴埋めの部分は与えられた文章の脈絡とその後ろにどのような問題が待ち構えているのかを見極めた上で，解法の選択を見出していかなければならないところに存在します。解法の選択とは計算のみを率先して攻略できるような問題ばかりではなく，ドリル学習やパターン学習を生む以前の数学的な根幹をなす部分に触れることもあるため，そのような力を問いたいことが大きく変更されていることになります。すでに感じていることだと思いますが，センター試験と比べると計算のみを率先して解答に至るような問題は減少することは肝に銘じておかなければならないかと思います。

ところで，これまでのセンター試験において，何を求めればよいのかは明確となっているものの，中にはとても難易度が高く数学的な観点を問う出題もされています。例えばですが，

17’センター試験　追試　数学ⅠA　第2問［3］
【データの分析の性質と表現の仕方】

17’センター試験　追試　数学ⅡB　第2問(3)
【定積分の面積の差し引きとその性質】

17’センター試験　追試　数学ⅡB　第4問(3)
【ベクトルと内積と面積のその性質】

16’センター試験　追試　数学ⅠA　第5問
【三角形の5心についての性質とその表現】

16’センター試験　追試　数学ⅡB　第4問
【ベクトルと正八角形について】

はその一例と言えるのではないのでしょうか。

また，なぜこの事例を列挙したのかというと，**センター試験の追試験**は，その翌年のセンター試験と酷似している事例も多々あります。上記の事例を**18’センター試験の本試験**と対比させてみると非常に面白い結果となるでしょう。ましてや，**16’センター試験の追試験**と**17’センター試験**の本試験を対比させても，同類の出題があることは明瞭です。

さて，もう少し細かい分析を含めて話を進めていきますが，**数学ⅠA**における図形の問題では，必ず**円が絡む**ということです。正弦定理，余弦定理といった有名定理はもちろん利用できることは大前提とすべきですが，どこかを中心にして円を描くことによって，問題を紐解く重要な手掛かりになることは否めません。**新テスト**でもこれは主張されている内容の一例です。**18’センター試験第2問**(1)などがこれに相当するかと思います。**新テスト**では2017年5月16日に公表された**モデル問題第2問**がこれに相当するでしょう。この問題は解法の選択が存在し，方針1（2次方程式の解の存在範囲の問題と捉える）と方針2（円を描くことによって処理する）から，それぞれの解法のうまいところを考えていくことで，繋がりのもてる有機的な結びを促す問題として提示された記憶があります。

また次の**18’センター試験の追試験　数学ⅡB　第1問**ですが，三角関数絡みの出題であるものの，この問題は過去に**大阪大**で出題されている類題事例の一つといえるでしょう。つまり，センター試験といえども穴埋め形式を記述式と思いながら答案を作成していくことは，決して2次力をセンター試験前に減衰させないものだと個人的には考えます。

18’センター試験　追試　数学ⅡB　第1問

> 座標平面上に点 $A(1,\ 0)$，$P(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，$Q(2\cos 3\theta,\ 2\sin 3\theta)$ をとる。θ が $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ の範囲を動くとき，AP^2+PQ^2 の最大値と最小値を求めよう。
>
> AP^2 は
>
> $AP^2 = \boxed{ア} - \boxed{イ}\cos 2\theta$
>
> $\quad = \boxed{ウ} - \boxed{エ}\cos^2\theta$
>
> である。また，PQ^2 は
>
> $PQ^2 = \boxed{オ} - \boxed{カ}\cos\theta$
>
> である。
>
> $\dfrac{\pi}{3} \leqq \theta < \pi$ であるから，
>
> $\boxed{キク} < \cos\theta \leqq \dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。
>
> したがって，AP^2+PQ^2 は，
>
> $\theta = \dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\pi$ のとき最大値 $\boxed{スセ}$ をとり，
>
> $\theta = \dfrac{\pi}{\boxed{ソ}}$ のとき最小値 $\boxed{タ}$ をとる。

大阪大

> 単位円周上の3点 $P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$，$R(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$ を考える。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で動くとき，PQ^2+QR^2 のとり得る値の範囲を求めよ。

これは個人的な考えであり，何もデータとして得られているわけではありませんが，この数年間のセンター試験については，上記のように，過去に難関大などで出題された入試問題を少しアレンジを加えて出題している問題がいくつか存在していることも考えられます。そういえば，**新テスト**においても鋼像問題（平成29年5月16日公表）は過去の**京都大（類題は他大でも多数出題がある）**を少しアレンジを加えて出題したものと考えると，これからの**新テスト**においてはこのように過去問を**日常生活に密着（アレンジまたはカスタマイズ）した出題**がされることも考えられ，これまでの難関大などの出題において，設定を変更するなどまたは状況を日常型にシフトするなどで対応できる部分がいくつか存在するものもあります。そういう意味でも，背景が整っているような問題は，それらを少し設定変更することで色々な問題へと派生していくことも考えられます。

その代表的なものといえば，

コンピュータと n 進法など
フェルマー点
オイラーの多面体定理（18’追試で出題済み）
カタラン数
モンモールの問題
フィボナッチ数列
巴戦やトーナメント

など，列挙するとキリがありませんが，背景が整っている問題に対して，それらを日常生活に帰着させて議論を積み重ねておくことは，**新テスト**対応への導入と言えるかもしれません．それに加え，**東京大**の最近の2次試験においても，フィボナッチ数列を形を変えて出題している事例をトピックスにあげると，有名な問題についてはその性質なども生まれていることもあるので，それらを探究しておくことも大切な要因になるかと思います。

略歴

鶴迫 貴司　つるさこ たかし

大阪府生まれ。40歳。立命館大学理工学部数学物理学科卒業。同大学院修士課程修了。有名進学校を赴任し，現在は母校私立東山中学・高等学校で教壇に立つ。これまでの経験を活かし他府県の教育研究会や高校や大学での講師を務めるなど，生徒や教員向けのセミナーを行っている。リピーターが多く毎年恒例のセミナーもある。また月刊誌『現代数学』の連載は新テスト対応への誘いを促すような話題を提供しており，単行本『もしこの問題に出会わなかったとしたらⅠ～Ⅲ（現代数学社）』においても，新テスト対応の考えや，受験生が苦手とする題材を系統的に採り上げ，別解などを豊富に揃えており，有機的な学びを促進する題材を挙げている。これらは高校生だけでなく先生方からも好評を得ている。
e-mail : t_tsurusako@higashiyama.ed.jp

多面的に探る

About Manhattan distance

岡山県立岡山朝日高等学校　山川 宏史

1．はじめに

一昨年，教え子が Manhattan に洋行し無事帰朝したので，ご当地に因んだ話題を考えてみよう。

2．定義

> 座標平面上の2点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ に対して
> $$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$
> と定義し，2点 A，B 間のマンハッタン距離という。

Manhattan や Kyoto のような碁盤目状の都市の2点間を移動する際に，ビル内を突っ切るわけにはいかないので，東西か南北のみの移動での最短距離を表す。

考案者 Hermann Minkowski (1864～1909 Russia) に因んで，ミンコウスキー距離ともいう。定義から，次の距離の公理を満たすことがわかる。

Ⅰ　$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})\geqq 0$　(等号は，A＝B のときに限る）非負性

Ⅱ　$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=d_1(\mathrm{B},\ \mathrm{A})$　対称性

Ⅲ　$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})+d_1(\mathrm{B},\ \mathrm{C})\geqq d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{C})$　三角不等式

記号に d_1 を用いるのには，理由がある。

$$d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

が，お馴染みユークリッド距離で

$$d_\infty(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\max(|a_1-b_1|,\ |a_2-b_2|)$$

を，チェビシェフ距離というからである。一般に

$$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\sqrt[p]{(a_1-b_1)^p+(a_2-b_2)^p}$$

と定義すると，$d_\infty(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\lim_{p\to\infty} d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})$ であり，Ⅲは

$$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})+d_p(\mathrm{B},\ \mathrm{C})\geqq d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{C})$$

と表すことができ，この不等式は成り立つことがわかっている (Minkowski's inequality)。

上の定義は，2次元のものであり，n 次元に一般化される。

$$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|,$$

$$d_p(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\left\{\sum_{k=1}^{n}|a_k-b_k|^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

以下では，2次元のマンハッタン距離について考えることにする。簡単のため，記号は d を用いる。

3．1994年東大理系第6問(1)

■問題■

> xy 平面上の2点 P，Q に対し，P と Q を x 軸または y 軸に平行な線分からなる折れ線で結ぶときの経路の長さの最小値を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ で表す。
> (1)　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$ に対し，$d(\mathrm{O},\ \mathrm{P})=d(\mathrm{A},\ \mathrm{P})$ をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を xy 平面上に図示せよ。

▲解答▲

直線 $y=x$ に関する対称性により，$y\leqq x$ のもとで次の4つの場合を調べるとよい。

(i)　$x\geqq 1,\ y>0$ のとき

条件式より　$x+y=x-1+|y-1|$

$y+1=|y-1|$

$y>0$ ゆえ，これは成り立たない。

(ii)　$x\geqq 1,\ y\leqq 0$ のとき

条件式より　$x-y=x-1-(y-1)$

$0=0$　これはつねに成り立つ。

(iii)　$x<1,\ y>0$ のとき

$y\leqq x$ より，$x>0$，$y<1$ であるから条件式より　$x+y=-(x-1)-(y-1)$

$x+y=1$

条件 $y\leqq x$ のもとでは　$x+y=1\left(\dfrac{1}{2}\leqq x<1\right)$

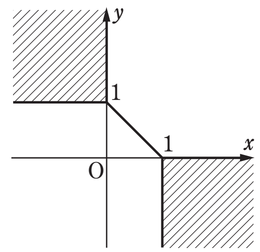
(iv)　$x<1,\ y\leqq 0$ のとき

条件式より $|x|-y=-(x-1)-(y-1)$

$|x|+x=2$

$2x\leqq|x|+x=2$ であるから，$x=1$ となるが，条件を満たさない。

以上から，求める範囲は次の図の長さ $\sqrt{2}$ の線分と斜線部の領域である（境界線を含む)。……答



@　定義を言葉で表すとは，東大も憎し。正攻法ならば，9つの場合分けが必要。本解答は非常にうまい処理を。このあとに，超重量級の(2)があった。

@　与えられた2点を結ぶ直線の傾きが ±1 の場合が本問のように広さをもつ領域に。座標軸と平行な場合には，垂直二等分線となりお馴染み。では，それ以外の場合は？(折れ線に) 読者諸賢でご検討あれ。どうぞご健闘を。いずれ，大学入試のネタになると思われるが，如何に。十分楽しめるかと。

4．2013年岡山大学理系第3問(1)，(2)

■問題■

> xy 平面上の2点 $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ を
> $d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$ で定義する。
> いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。
> (1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。
> (2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

▲解答▲

(1)　$\boxed{\text{証明}}$　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とする。条件より

$|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$

すなわち　$|y|=|x-3|-2|x+3|$ ……①

したがって，点 $(a,\ b)$ が T 上にあるとき，$|b|=|a-3|-2|a+3|$ が成り立つ。

このとき，$|-b|=|b|=|a-3|-2|a+3|$ が成り立つので，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。終

(2)　(1)より T は x 軸に関して対称である。

$y\geqq 0$ のとき①を満たす点からなる図形を考える。

このとき，①より　$y=|x-3|-2|x+3|$

(i)　$x<-3$ のとき

$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

$y\geqq 0$ から　$-9\leqq x<-3$

(ii)　$-3\leqq x<3$ のとき

$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

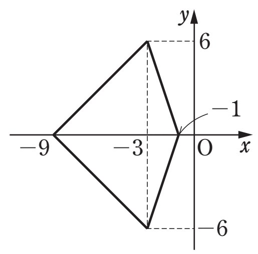
$y\geqq 0$ から　$-3\leqq x\leqq -1$

(iii)　$x\geqq 3$ のとき

$y=x-3-2(x+3)=-x-9$

これは，$y\geqq 0$ を満たさない。

以上と x 軸に関する対称性から，T は次の図のようになる。



求める面積は　$\dfrac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\times 2=48$　……答

@　地方のブロック大学ゆえ，定義は数式で。なお，文系学部はもっと甘く，d の定義なしにいきなり絶対値の等式で始まっていた。2定点からのマンハッタン距離の比が一定の軌跡を問うている。本問のように2定点が水平または垂直の場合は凧型に。ちょうど，Apollonius の円に相当する。その他の場合は複雑に。読者諸賢はどうぞお試しを。

5．創作問題

■問題■

座標平面上の異なる2点A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ に対し

$$d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$$

$$d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$$

と定義する。$\dfrac{d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}{d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}$ の最大値，最小値をそれぞれ求めよ。また，それはどのようなときかを答えよ。

▲解答▲

Aを原点O，B$(a,\ b)$として一般性を失わない。ただし，BはOと異なる点とする。←宣言しておく

(i)　$a=0$ のとき

$$\frac{d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}{d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}=\frac{\sqrt{b^2}}{|b|}=1 \quad (\because\ b\neq 0)$$

(ii)　$a\neq 0$ のとき

$$\frac{d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}{d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|a|+|b|}=\frac{\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}}{1+\dfrac{|b|}{|a|}}$$

$(\because\ a\neq 0)$

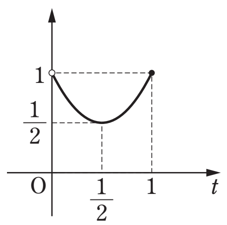
ここで，$1+\dfrac{|b|}{|a|}=\dfrac{1}{t}$ とおくと　$0<t\leqq 1$

$$\frac{d_2(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}{d_1(\mathrm{A},\ \mathrm{B})}=t\sqrt{1+\left(\frac{1}{t}-1\right)^2}$$

↑ここが技巧的

$$=\sqrt{2t^2-2t+1}$$

$$=\sqrt{2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$



以上から

最大値　1

（直線ABが座標軸に平行なときに限る）

最小値　$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

（直線ABの傾きが ± 1 のときに限る）

……答

@　直観的に，答えは納得がいく。数学Ⅲの微分を用いてもよいが，やりすぎかと。なお，この事実は n 次元に拡張できる。最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ に。読者諸賢でご検討を。

6．おわりに

今回話題に挙げたマンハッタン距離は，大学入試にときどき出題される。試験中は気持ちに余裕がないので，いきなりの定義に大差がつくことも多い。日頃から，現地調達方式で問題文に突然定義を与えられて解く訓練もしておくことは重要かと。

筆者は日々の通勤途上のサイクリングや休日の遠距離ロードにおける珠玉の思考時間を愛している。今回の創作問題はロードにおけるもの。拙い作品を最後までお読み戴き，感謝。さて，またロードに出かけるか。今度はなにがあるやら楽しみやな。　　to be continued

多面的に探る問題実践例

中央大学　藤田 岳彦

前号に引き続き，今回も「1つの重要な例題を取り上げ，ただそれを解くのではなく，皆で議論しあい，いろいろな方法で解く」という方法を，授業にどのようにアクティブラーニングを取り入れるかの1つの取り組み例として提案する。

東京大学の入試問題の中でも有名なものとして，次のような問題がある。

すべての正の実数 x，y に対し，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$$

が成り立つような実数 k の最小値を求めよ。

（95東京大学）

これは前号で取り上げた問題

問題：x，y が $x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ を満たすとき，xy の最大値を求めよ。

における様々な考え方が使える良問である。

しかし，以前の問題に比べると対称性が崩れているため若干扱いにくい。

それらを踏まえて，いろいろな解法を示してみよう。

1．コーシー・シュワルツの不等式

$a>0$，$b>0$ に対して，コーシー・シュワルツの不等式より，

$$a\sqrt{2x}+b\sqrt{y}\leqq\sqrt{a^2+b^2}\ \sqrt{2x+y}$$

が成り立つ。ここで，$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$b=1$ とすると，

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{\frac{3}{2}}\ \sqrt{2x+y} \quad \text{よって，}\ k\geqq\sqrt{\frac{3}{2}}$$

また，等号が成立するのは

$\sqrt{2x}:\sqrt{y}=a:b=\dfrac{1}{\sqrt{2}}:1$ のときであり，

$x=1$，$y=4$ のとき，これを満たす。

よって，求める実数 k の最小値は，$k=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

以下，結論は同じなので省略し，考え方のみを記す。

2．同次形

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ を変形すると，

$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k$ となるから，$\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}$ の最大値を求めればよい。

ここで，$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=\frac{1+\sqrt{\dfrac{y}{x}}}{\sqrt{2+\dfrac{y}{x}}}=\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}} \quad (t>0)$$

の最大値を求めればよい。

$f(t)=\dfrac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{2+t}}$ とすると，

$$f'(t)=\frac{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}\cdot\sqrt{2+t}-(1+\sqrt{t})\dfrac{1}{2\sqrt{2+t}}}{2+t}$$

$$=\frac{2+t-(1+\sqrt{t})\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\,(2+t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{2-\sqrt{t}}{2\sqrt{t}\,(2+t)^{\frac{3}{2}}}$$

であるから，その増減を調べると，$t=4$ のとき最大となる。

3．三角関数

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq k\sqrt{2x+y}$ を変形すると，

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}\leqq k$$

となる。ここで，$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=s$，$\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=t$ とおくと，$\dfrac{x}{2x+y}=s^2$，$\dfrac{y}{2x+y}=t^2$ より，

$$2s^2+t^2=\frac{2x}{2x+y}+\frac{y}{2x+y}=1$$

よって，$2s^2+t^2=1$ $(s>0,\ t>0)$ のとき，$s+t$ の最大値を求める問題と考えられる。

$s=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta$，$t=\cos\theta$ とおけるので，

$$s+t=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}\sin(\theta+\alpha)$$

$\left(\text{ただし } 0<\alpha<\frac{\pi}{2},\ \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

よって，$s+t\leqq\sqrt{\frac{3}{2}}$ が成り立ち，$s>0$，$t>0$ より，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ であるから，$\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$ のとき等号が成り立つ。

4．2次曲線と接線

解答3．において，

楕円 $2s^2+t^2=1$ …①

上の点 $(s_1,\ t_1)$ $(s_1>0,\ t_1>0)$ における接線が，直線 $s+t=k$ …②と一致するとき，k は最小となる。楕円 $2s^2+t^2=1$ 上の点 $(s_1,\ t_1)$ における接線は，

$2s_1s+t_1t=1$ …③

②と③が一致するとき，②の s，t の係数の比と，③の s，t の係数の比も一致するので，

$2s_1=t_1$

よって，①より $2s_1{}^2+(2s_1)^2=1$ となり，$s_1>0$ より $s_1=\frac{1}{\sqrt{6}}$　これより，$t_1=\frac{2}{\sqrt{6}}$

よって，求める実数 k の最小値は，

$$k=\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{3}{\sqrt{6}}\left(=\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$$

（このとき，$(s_1,\ t_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

と $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+y}}=s$，$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2x+y}}=t$ から，

$x:y=1:4$ である）

5．凸性

関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフは常に上に凸であるから，

$t\sqrt{x}+(1-t)\sqrt{y}\leqq\sqrt{tx+(1-t)y}$ $(0<t<1)$

が成立する。

ここで，x を ax，y を by（ただし，$a>0$，$b>0$）と置き換えると，

$$t\sqrt{ax}+(1-t)\sqrt{by}\leqq\sqrt{tax+(1-t)by}$$

となる。

ここで，$t\sqrt{a}=(1-t)\sqrt{b}$ …①，

$ta=2(1-t)b$ …②

を満たす t，a，b の関係を求める。

①より，$\frac{1-t}{t}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ であるから，これと②より

$$\frac{(1-t)^2}{t^2}=\frac{a}{b}=\frac{2(1-t)}{t}$$

すなわち，$t(1-t)^2=2(1-t)t^2$

したがって，$1-t=2t$ より $t=\frac{1}{3}$

また，このとき $\frac{a}{b}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{1}{3}}=4$ すなわち $a=4b$

よって，$\frac{1}{3}\sqrt{4bx}+\frac{2}{3}\sqrt{by}\leqq\sqrt{\frac{1}{3}\cdot4bx+\frac{2}{3}by}$

が成り立つ。

これを変形して，$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqq\sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{2x+y}$ が得られる。

等号が成立するのは，$4bx=by$ すなわち $y=4x$ のときである。

特集

おせっかいな問題集「ATLS」とは?
～開発者に聞く～

学校現場では徐々にタブレット端末の導入が進み，ICT 活用教育の事例を頻繁に聞くようになってきました。また，教育現場では「重いカバン」という言葉がよく問題提起されるようになってきています。

そのような中，全国の中学校や高校で使われているデジタル問題集サービス「おせっかいな問題集 ATLS（アトラス）」を開発する株式会社 forEst の創業者・代表取締役 CEO の後藤匠さんにお話を聞きました。

後藤 匠　ごとう たくみ

株式会社 forEst
代表取締役 CEO
1989 年 8 月 19 日生まれ。
「自分が高校生の時に欲しかった学習サービス」を開発するために，東京工業大学大学院在学中に株式会社 forEst を起業する。

― ATLS とはどのようなサービスなのですか？

教科書や問題集を，タブレット端末で紙の教材と同じような感覚で使うことができるサービスです。その学習履歴に基づき，学習量のグラフを作成することや，オススメ問題などを自動で推薦することができます。

また，先生は ATLS で宿題の提出･結果の集計･ノートの回収まで行えます。その学習効果や先進性が評価されて，文科省も後援する「第 10 回日本 e-learning 大賞デジタル参考書部門賞」を受賞いたしました。お馴染みの，Focus Gold/Z シリーズ，詳説数学などの教科書も多数 ATLS でデジタル化されています。

― 先生や生徒から評価されているポイントはなんですか？

開発コンセプトでもある「なめらか」という点ですね。これまでの学習の仕方や先生の指導の仕方を大きく変えずに，ICT を活用して学習や指導をより効果的にすることにこだわって開発しています。

実際に，先生からも「アナログとデジタルのバランスが素晴らしい」と評価をいただくことが非常に多いです。

学校現場の中で実際に使われている教材を電子化しているので，先生にも安心して活用いただけています。

それと，私が高校生の時に心から欲しかったサービスを作っているということもあり，使い心地にもこだわっています。特にタブレット上で書籍のページをめくる動作は非常にスムーズで，「本当に紙をめくっているようにサクサクだ」と評判です。また，問題はノートとペンで解くようにしており，生徒からも「色々と便利なのに，これまでの勉強と大きく変わらないので，違和感なく使うことができる。」と評価していただいています。

あとは，手前味噌ですが，新機能の開発スピードも褒めていただくことが多いです。生徒や先生が，これまで以上に便利に学習・指導ができるように，サービスは進化し続けています。全てに応えられるわけではないですが，生徒や先生の声から生まれた機能も多いです。

― 具体的な使い方を教えてください。

ATLS は実際に出版されている教科書や問題集を収録しています。Kindle のような電子書籍サービスと同様に，書籍を選び，紙面と同じ画像をそのまま見ることができます。解きたい問題があったら，問題に設置しているボタンを押すと，問題解答ページに移動します。タイマーが勝手に動きはじめるので，これまでと同じように問題を見ながらノートに問題を解いていきます。

解き終えたら，タイマーをストップし，解説を見ながら自己採点をして正誤の結果を ATLS に入力します。

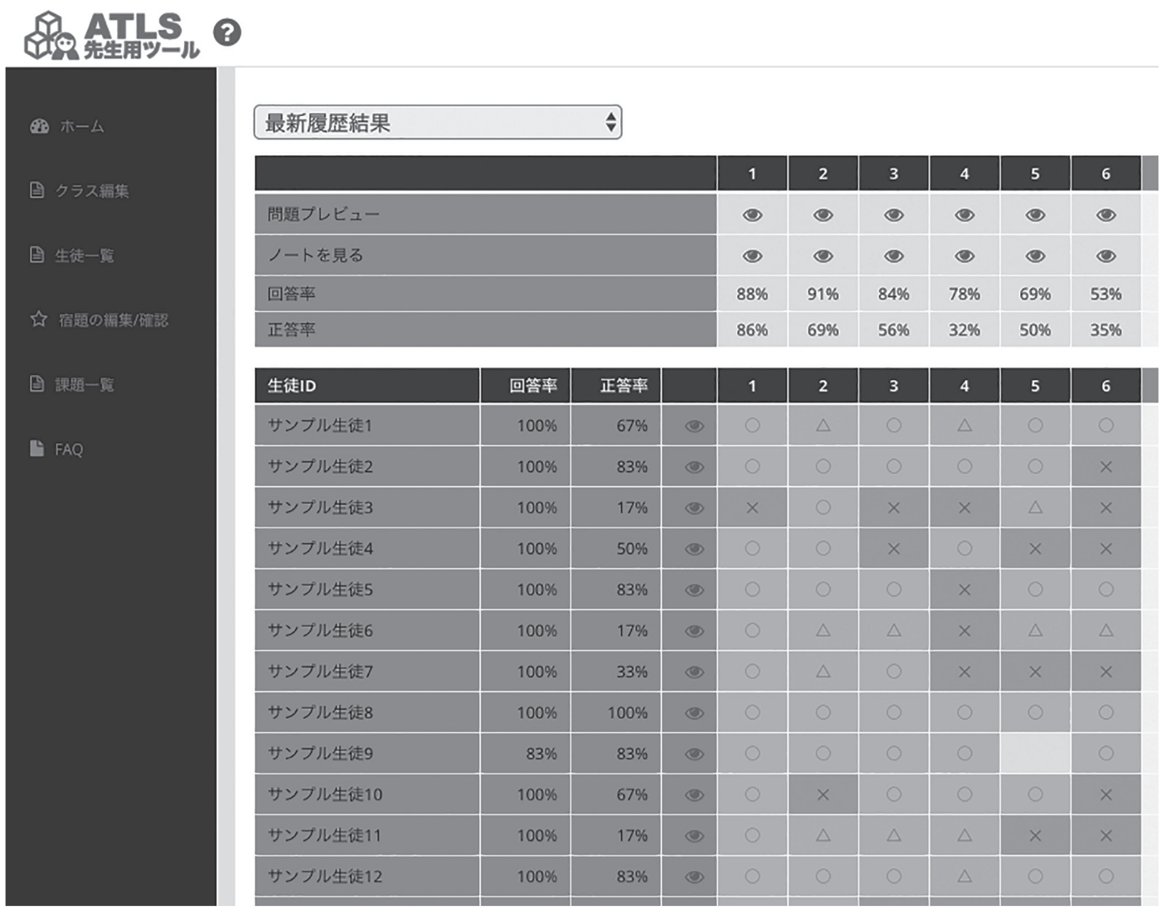
問題集を選んで，ページを見ながら，問題を選んで，ノートで解く。本当にこれまでの勉強方法と変わらないんです。

これによってどの問題にどれだけ時間を要したのか，正解したのかどうかなどの学習履歴がどんどん貯まっていく仕組みです。その学習履歴をもとに，「間違えっぱなしの問題」の復習や，オススメされる類似問題を自主的に解くことができます。

― その学習履歴は先生も見ることができるのですか？

そうですね。自分の持つクラスの生徒の学習履歴を見ることができます。

実は，それだけじゃなくて，ATLS で購入していただいた教材から宿題の配信や，解答結果の自動集計などもできるので，多くの導入校では宿題の管理ツールとして活用していただいています。ATLS で問題を解いた後に，専用のアプリでノートの写真を撮ってもらうと，写真が問題ごとに先生に自動送信されるので，ノートの回収をしなくても生徒のノートを見ることができます。特定の問題を間違えた生徒のノートだけを集めて一覧で見ることもできます。



	1	2	3	4	5	6
問題プレビュー						
ノートを見る						
回答率	88%	91%	84%	78%	69%	53%
正答率	86%	69%	56%	32%	50%	35%

生徒ID	回答率	正答率		1	2	3	4	5	6
サンプル生徒1	100%	67%		○	△	○	△	○	○
サンプル生徒2	100%	83%		○	○	○	○	○	×
サンプル生徒3	100%	17%		×	○	×	×	△	×
サンプル生徒4	100%	50%		○	○	×	○	×	×
サンプル生徒5	100%	83%		○	○	○	×	○	○
サンプル生徒6	100%	17%		○	△	△	×	△	△
サンプル生徒7	100%	33%		○	△	○	×	×	×
サンプル生徒8	100%	100%		○	○	○	○	○	○
サンプル生徒9	83%	83%		○	○	○	○		○
サンプル生徒10	100%	67%		○	×	○	○	○	×
サンプル生徒11	100%	17%		○	△	△	△	×	×
サンプル生徒12	100%	83%		○	○	○	△	○	○

ー「AIで生徒個別に自動で宿題が…」みたいなものじゃないのですね。

はい，あくまでもATLSは黒子的な存在です。宿題のノートを集め，学習の成果を整理して，集計するという先生の仕事の中で「先生自身がやる必要のない業務」をICTで代替しようとしています。ただ，内容の確認や実際の指導は，やはり先生自身にやってもらいたいと思っています。先生がより良くクラスの状況を把握するための機能は今後も強化していく予定ですが，先生の替わりになろうなんてことは一切考えていません。やはり，生徒に一番向き合い，やる気を湧き立てるのは，人間の役割だと思っています。しつこいようですが，その先生の役目をICTによってサポートすることは色々とできるはずなので，そこを突き詰めていきたいと考えています。

それは生徒側の学習機能にも言えることで，ベルトコンベア式に「次ニ解ク問題ハコレダ」と提示しても，生徒の自主性は育まれないし，学習が「自分ごと」にならないと思っています。だから，あくまでも「復習したい」と思った時に，はじめて復習すべき問題を提示するなど，あくまでも生徒を主役とした学習サポートに徹するように心がけています。

ー その考え方が根底にあるので，教育現場に馴染むサービスになっているのかもしれませんね。他にも先生から評価されている点はありますか？

この考え方に賛同していただけて，これまでICTにあまり賛成ではなかった先生も，「これならいいよ」と言ってくれることが多くなってきました。

他には，学習履歴がリアルタイムで集計されるので，夏休みの宿題でも常に状況が把握できることや，普段の宿題でも授業前に宿題の内容を確認できることも，ATLSで宿題を出すメリットだと思っています。授業前に状況を確認できれば，正答率の低い問題のノートを事前に見ておいて，重点的に説明すべき点などを考えておくことができます。

それと，これまでだとノートは生徒ごとにしか集められなかったので，問題ごとにノートを集められる点も，クラスの全体像が把握しやすいと評価されています。

授業の中で活用している学校もあります。面白い解答を電子黒板に映して生徒に解説をさせたり，間違えた生徒の解答を匿名で映し，「みんなだったら，こういう解き方をした人に対して，どうやって教える？」と発問したりして，アクティブラーニング型の授業をしている先生もいらっしゃいます。

ー 最後に読んでいる方々にお伝えしたいことはありますか？

私達はこれからも，生徒や先生のこれまでの営みを強くサポートする存在として，出版社の方々とも協力しながら，良いサービスを提供し続けます。先生達とも一緒にATLSを成長させていきたいので，色々とアドバイスをいただけると嬉しいです。

トライアルやスマートフォンでの活用など，柔軟に導入できるようにプランを準備しているので，ご興味ある方は，ぜひ営業担当者にお問い合わせください！

ー ありがとうございました！

――知が啓く。――
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

本　　社	〒543-0052 大阪市天王寺区大道4丁目3番25号	TEL(06)6779-1531	FAX(06)6779-5011
東京支社	〒113-0023 東京都文京区向丘2丁目3番10号	TEL(03)3814-2151	FAX(03)3814-2159
北海道支社	〒060-0062 札幌市中央区南二条西9丁目1番2号サンケン札幌ビル1階	TEL(011)271-2022	FAX(011)271-2023
東海支社	〒460-0002 名古屋市中区丸の内1丁目15番20号ie丸の内ビルディング1階	TEL(052)231-0125	FAX(052)231-0055
広島支社	〒732-0052 広島市東区光町1丁目7番11号広島CDビル5階	TEL(082)261-7246	FAX(082)261-5400
九州支社	〒810-0022 福岡市中央区薬院1丁目5番6号ハイヒルズビル5階	TEL(092)725-6677	FAX(092)725-6680

20181201