啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

Focus Gold 通信

フォーカスゴールド

［特集］

p.2-5

高校数学参考書座談会
～参考書の今後について～

多面的に探る

p.6-24

◆大学入学共通テスト（新テスト）に向けた考例と道標
東山高等学校　鶴迫貴司

◆東大複素数平面問題の背景
岡山県立岡山朝日高等学校　山川 宏史

◆多面的に探る問題実践例
中央大学　藤田岳彦

vol.15

特集 高校数学参考書座談会
〜参考書の今後について〜

竹内英人　荻原洋介　水野健太郎　対馬英樹　吉江校一

2017 年 8 月 20 日，高校数学参考書の今後について，竹内英人先生（Focus Gold 筆頭著者）を中心に「高校数学参考書座談会」を開催しました。ご協力いただいた先生方は，荻原洋介先生（元東京農業大学第一高等学校・現東京学芸大学附属高等学校），水野健太郎先生（大阪桐蔭高等学校），対馬英樹様（株式会社メディックメディア），吉江校一様（株式会社 コンテンツアンドシステムズ代表取締役社長）です。

以下“Focus Gold”は“FG”と省略します。また，敬称も略させていただきます。

自己紹介

竹内：もともとは愛知県の高校の教員をやっており，12〜13 年前に現在の大学に移った。現在は，中学高校の数学の教員養成の指導をしている。FG は立ち上げの時から関わっており，改訂を重ねるにつれ，どんどん良くなってきていると思っている。ただ，他社も良いものを作っているので，さらに良い教材を作っていきたい。今回の座談会では，忌憚のないご意見をいただきたい。

対馬：以前は，教材出版社に務めていたが現在の会社では社会人向けの e-ラーニングの仕事を担当している。予備校で講師をしていたこともあった。教えていたのは理科がメイン（主に物理・化学）であったが，理科を勉強するときも数学の知識が必要。発行されている学習参考書は，本当に丁寧に作られていると感じている。

吉江：C&S という会社で代表を務めている。大学ではコンピュータ系を専攻していて，そのままコンピュータ系の会社に就職するかと思っていたが，アルバイトの塾講師の仕事が面白くなり教育系の道に。大学を卒業後，塾を立ち上げた。そこでは，自分が作った教材をインターネットで公開し，色々な方からご意見をいただいた。また，NPO という形で「F テキスト」という教科書を作成する活動をしていた。現在の会社では，塾経営を主体に，英作文を Web 上で添削するシステムなどの Web 教材の提供などをしている。

荻原：現在は，6 年ぶりに高 1 の担任をしている。また，高 3 の受験指導を 8 年間してきている。高校での指導内容もかなり変わってきているので模索しながら指導を行っている。新入試対策として，大学入試を英訳したものを解かせるなどの試みを行っている。

水野：主に中高一貫コースで数学を教えている。中高一貫のため，中学で高校数学を学ぶことになる。中 2〜3 にかけては，生徒が自ら勉強するという姿勢を身につけていく期間であるため，その辺りもケアしながら指導を行っている。私は，数学の参考書レビューのサイトも開設していた。そういう縁もあり，この場に参加させていただけることになった。

水野先生

「数学参考書評サイト『水野の数学参考書レビュー』を開設していて，最盛期は書店店頭に並んでいる参考書はすべて持っているということもあった。」

近年の参考書・問題集について

竹内：FG を立ち上げた当時，数学の解答の行間を読める生徒が少なくなってきていた。また，傍用問題集とは違い，参考書は長期休暇中の課題など，基本的に生徒が自学自習するためのものであり，買ったはいいが半分以上が本棚の肥やしみたいになっていた。使いこなされていないのはもったいない！なんとか生徒に使ってもらえるようにするにはどうすれば良いか考えた。FG が最初に目指したのは，「丁寧な解答解説」，次に目指したのは，「学校の先生が授業で教えている解説の流れを汲むこと」。また，従来は「1 例題半ページ」が主流だったが，「1 例題 1 ページ」または「1 例題見開き 2 ページ」に変更し，行間を省かない解答解説を目指した。どっちが本編なのかというぐらい解答編を厚くするなど参考書の新しい流れを作ってきた。「テスト前の質問が一気に減った。」と評判が良い。その結果，かなり分厚くなったが…。

竹内先生

「FG が最初に目指したのは，丁寧な解答解説。参考書の新しい流れを作った。先生から『FG に変えてテスト前の質問が一気に減った』との評判が届くのは嬉しい。」

水野：いっときに比べると，書店に並んでいる参考書の数もかなり減ってきた印象がある。アニメ風のキャラが登場するものなど，参考書自体が色々な階層に分かれてきているように思う。

竹内：私もよく書店に行くが確実に参考書の出版数は減ってきていると思う。現状では売れる本が決まってしまっているので，新刊を出してもなかなか売れない。生徒自身も学校からの課題で忙しくて，書店に探しに行く時間がないのが現状。また，買いに来ている生徒がいたとしても，大半は，「即効性があり，楽に成績が上がる本はないかな？」と考えていることが多い。学校で与えられた本をやりきれていないのに，他の人から「いいよ」という情報だけを聞いて買いに来ている。

これからの時代に求められる参考書像は？

荻原：最近の参考書は，網羅されているがゆえに問題が細分化されすぎていて例題のつながりが見えにくいことも多い。「問題 A の考え方と問題 B の考え方を組み合わせると問題 C が解ける」というような記述が書かれている参考書があるといいなと思う。また，「なぜこの問題はこの解き方で始めるのか？」など，問題の第一着眼点にクローズアップした内容ももう少し書かれていると嬉しい。

荻原先生

「参考書の★★★レベルの問題は解法の第一着眼点がわからない。2〜3行で書くのは難しいが，着眼点にクローズアップした参考書があれば嬉しい。」

竹内：「考え方」には，天下り的というか，結果を知っている立場からの書き方になっていて，必ずしも第一着眼点が思いつく誘いになっていないものもある。また，「考え方」がシンプルなヒントになっている参考書もあるが，できる生徒ほど「なぜそういう式変形になるのか」，「なぜこの式が出てくるのか」が知りたい。ただ，その部分まで全てを「考え方」に掲載するのは難しい部分もある。

荻原：そういうヒントを細かく書いた参考書は，網羅性を犠牲にしている。FG は網羅性が高いが網羅性が高ければ，例題が細かく分かれているからどこから手を付けていいかわからない人もいるだろう。だから問題集との連携があると良いかも知れない。FG に対応した問題集，例えば，その

問題集には「この問題が目標だ」という問題があり，「その問題を解くために必要な考え方はFGのp.○○○とp.△△△に載っている」など紐付けする記述があるようなイメージか。もっと言えば，（高大連携を意識するという意味で）高校レベルを超えた課題を掲載しても良いかも。

水野：ATLS（アトラス）のようにこれからは参考書にも人工知能（AI）が絡んでくるのではないか。次はここをやればいいよ，と提案してくれるような。

対馬：AI的な話といえば，以前の会社で，模擬試験の結果から生徒に学習法などを提案する機能に関するアルゴリズムを検討したが，そんなに簡単ではないなと思った。あくまで「模試の成績で何点でした」という静的な情報しかなく，「どの部分をどのように間違えたのか」や「どこが分からなかったのか」の情報がなかった。FGは紙媒体だけではなくスマレクという映像媒体もある。生徒の学習履歴，どの映像からからどの映像に進んだかなどの遷移とかが得られたら次世代のサービスが開発できるのかも知れない。

対馬氏

「生徒の学習遷移の蓄積が得られたら次世代の教材が開発できるかも知れない。」

竹内：「何が分かっていないか」を明らかにしていくことはとても重要。今度，ある学校の授業で，次の議題で行おうと思っている。

> 【議題】
> 太郎くんはたすき掛け（特に，係数が1以外のもの）が苦手です。太郎くんに花子さんが「なぜ苦手？」と聞けば，「たすき掛けができるかどうかが分からない。また，できたとしても組合せが見つからない」という。
> 『花子さんになって太郎くんに説明してください』

竹内：まず，たすき掛けができるかどうかを考えるためには，前提となる背景「そもそも因数分解とは何なのか？」を理解しないとダメ。まずは，生徒にたすき掛けで因数分解ができる問題を作らせる。最初は，生徒は「因数分解が展開の逆」であることに気付かず，係数から決めようとするが，「因数分解」が分かってくれれば，たすき掛けの考え方も自然と頭に入ってくる。そうなれば，「二次方程式を因数分解で解くこと」の意味も理解し，最終的には「因数定理」へと発展していく。このように思考を発展させていくことが2020年度入試のポイントだと思う。思考力について，「どうやって日常の問題に落とそうか」と考えている向きもあるが，背景的・物理的なことにどうつながるかではないか。

吉江：文系の生徒に三角関数を教えているが，背景については学ぶ機会が無いため，なぜそんなことを勉強しなければならないのかと思っている生徒は多い。理系であれば物理の話が出来るが，文系はそうではないので，物理的な話はせずに「経済的な現象で三角関数のグラフが出てくることもあるよ」などと教えている。グラフのイメージが出来ないと教えるのにとても苦労する。

竹内：だとしたら，今後の入試でポイントとなる「思考力」を身につけるには，学んでいることの背景もきちんと押さえておかないといけないのではないか。教科書だけではなく参考書もそのような方向で考えていくべきかもしれない。

水野：改訂版のFGを拝見したが，「解答解説の丁寧さ」や「数学だけではなく学習法に関するコラム」等を通して，他社の参考書にはない「人間味」を改めて感じた。ただ，表紙の色などもあり，中身を理解していない人や初めての人には「重たい教科書」「冷たい参考書」と捉えられかねない部分もある。例えば，Facebookなどで，著者と直に連絡が取ることが出来たりするとより良いかもしれない。「この参考書を書いた先生はこんなに面白い先生なのか」と思えると，もっと興味を持ってくれるのではないか。

竹内：作り手の顔が見えるなど，著者との距離が近いのは理想ですね。

対馬：予備校で物理・化学を指導していたとき，必要なところで振り返れるコンテンツがほしかった。物理で波の話をする前に数学の三角関数がどこまでわかっているかを5分でやるような。
一から真面目に高校数学をやりましょうというのではなく，必要なことを「エッセンスとして言うとこうですよ」と示せるコンテンツがほしい。

吉江：参考書の制作活動自体をちゃんと見ていただくというのもいいのでは。今のFGの構成が，先生の意見を受けてこうなったというストーリーを発信すればどうか。

吉江氏

「先生方の声が今のFGの構成に結実した。多くの先生方の意見が活かされていることを発信しては。」

最後に

竹内：本日は貴重なご意見をいただきありがとうございました。実は，Facebookで今日の座談会の話を書いたところ，色々な人から「その情報は公開されるのか⁉」というお言葉をいただいた（笑）それくらい，関心の高い人も沢山いる。この会を単なる情報交換会で終わらせるのではなく，このメンバーで何かの教材を作り上げていけるような会にしていきたいと思っている。本当に今日はありがとうございました。

一同：ありがとうございました。

▲座談会にご協力いただいた先生方

多面的に探る

大学入学共通テスト（新テスト）に向けた考例と道標

東山中学・高等学校　鶴迫 貴司

1．はじめに

昨年の5月，7月には大学入試センターから大学入学共通テスト（新テスト）に関する数学ⅠAのモデル問題が公表され，生活密着型の数学の問題が話題を呼びました。そして11月には全国区で試行調査が実施され，それらの具体的な得点率や今後の課題などについても先日公表されました。私自身，このモデル問題や試行調査の問題を分析する中，これまでのセンター試験と異なる大きな点は，計算量で何とか凌いで得点に結びつけることができた受験生にとっては，結構ハードルが高くなる試験になるのではないかと感じました。

2．サンプル問題（その1）の解説と新テストへの道標

右の**サンプル問題（その1）**ですが，昨年5月に公表されたモデル問題の例題3と11月に実施された試行調査の大問2を参考にして作問させて頂きました。ある意味，1つの問題に対するアプローチを分野を越えて多角的に変更できるような問題です。上述では**数学Ⅰ**の範囲の枠の中で考えているように観えますが，それだけでなく，**数学A**においても同様の出題ができ，作図的な要素を加えても解決に至ります。また，**数学Ⅱ**の「**図形と方程式**」や「**三角関数**」のところでも扱えるような問題でありますが，今回は数学Ⅰの範囲でのみ解決に至るように致しました。

さて具体的な解説をさせて頂く前に，もう少し述べさせて頂くと，モデル問題でも試行調査においても，2次方程式の扱いは特に重要視されていることは言うまでもありませんが，その中では「解の存在範囲に帰着する方法」と「図形的な観方によって解決する方法」が提示されています。5月のモデル問題（数学で言う2つ目の問題）においては，後者に関してですが，「**円**」と「**直線**」の共有点の個数が「2個」または「1個」または「0個」というように，2次方程式で扱える内容でありながらも，図形的な解釈を加えることによって，ある意味，これまでは別解としての機能と役割を果たしてきたような解答作りが作問のネタにされていることになります。また，モデル問題や試行調査の問題は生活に密着した数学的な問題が多いのも事実であり，公表された問題の多くは，会話（対話）形式が多く，これまでのセンター試験では中々見受けられない出題の傾向です。そこで今回の**サンプル問題（その1）**は故意に会話（対話）形式とはせずに，あくまでもこれまでに与えられてきたような問題でありながらも，1つの学びが，次にどのような学びへとシフトしていくのかを観ながら，様々な景色を眺めることができるように配慮してみました。FGのどの例題かも参考程度に掲載することにいたします。

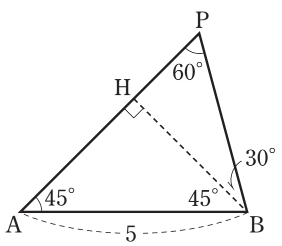
では，これまでに生徒の皆さんが身に付けた分野ごとの各々の力（点と点）を結び合わせていけるような話も含めて解説をしていきます。

（解説）

〔1〕（センター試験にあるようなネタです。公式の確認を含む）

(1)　（FGⅠA P.212 例題123参照）

題意を図示すると，次の図のようになる。

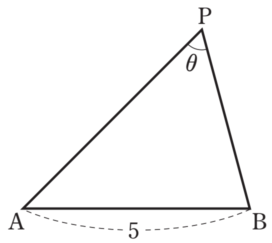


そこで，点Bから辺APに垂線を下し，その足をHとすると，題意より $\angle APB=60^\circ$ だから，$\angle PBH=30^\circ$，$\angle HBA=\angle HAB=45^\circ$ となる。このとき，直角二等辺三角形HABの辺の比が $AH:BH:AB=1:1:\sqrt{2}$ だから，

サンプル問題（その1）

〔1〕　図のように，平面上に2つの定点A，Bがあり，$AB=5$ とする。また，点Pは線分ABに対して，$\angle APB=\theta\ (0^\circ<\theta<180^\circ)$ を満たすものとする。

このとき，$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ク}}$ に当てはまる数を答えよ。



(1)　$\theta=60^\circ$ とし，$\angle ABP=75^\circ$ とするとき，BP，APの長さはそれぞれ

$$BP=\frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

$$AP=\frac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\left(\boxed{\text{カ}}+\sqrt{\boxed{\text{キ}}}\right)}{\boxed{\text{ク}}}\quad \left(\text{ただし，}\boxed{\text{オ}}>\boxed{\text{キ}}\right)$$

となる。

〔2〕　次に，2つの正の実数 p，q と2つの線分AP，BPに対して，

$X=p\cdot AP+q\cdot BP$

の最大値を考えることにする。

(Ⅰ)　$\theta=60^\circ$，$p=1$，$q=1$ とする。APの長さを a，BPの長さを b とすると，

$$a^2+\boxed{\text{ケコ}}ab+b^{\boxed{\text{サ}}}=\boxed{\text{シス}}\quad\cdots\cdots①$$

となるから，$a+b=k$ とおき，式①を a，k を用いて表すと，

$$\boxed{\text{セ}}a^2+\boxed{\text{ソタ}}ka+k^{\boxed{\text{チ}}}-\boxed{\text{シス}}=0\quad\cdots\cdots②$$

が得られる。従って，a についての2次方程式②が $0<a<k$ のところに少なくとも1つの実数解をもつような k のとり得る値の範囲を求める。それを k についての不等式で表すと $\boxed{\text{㋐}}$ となるので，求める X の最大値は $\boxed{\text{ツテ}}$ となる。

(Ⅱ)　$\theta=90^\circ$，$p=4$，$q=3$ とする。このとき，X の最大値は $\boxed{\text{トナ}}$ となる。

(2)　$\boxed{\text{ケ}}$～$\boxed{\text{テ}}$ に当てはまる数を答えよ。

(3)　$\boxed{\text{㋐}}$ に当てはまる k についての不等式を答えよ。

(4)　$\boxed{\text{ト}}$～$\boxed{\text{ナ}}$ に当てはまる数を答えよ。

(5)　次の⓪～④の中から正しいものをすべて選べ。$\boxed{\text{ニ}}$

⓪　(Ⅰ)において，X の最小値が存在する。

①　(Ⅰ)において，X が最大のとき，三角形ABPの面積は最大となる。

②　(Ⅰ)における AP^2+BP^2 の最大値は $\boxed{\text{ツテ}}$ の4倍に等しい。

③　(Ⅱ)における三角形ABPの面積は，X のとり得る値に関係なく一定である。

④　(Ⅰ)における $AP\cdot BP$ の最大値は，(Ⅱ)における $AP\cdot BP$ の最大値を2倍した値に等しい。

$$\mathrm{AH}=\mathrm{BH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{AB}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

となる。また，直角三角形 PHB の辺の比が BP：PH：BH$=2:1:\sqrt{3}$ だから，

$$\mathrm{PH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{BH}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

$$\mathrm{BP}=2\mathrm{PH}=\frac{5\sqrt{6}}{3}$$ 答

となり，求める AP の長さは

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AH}+\mathrm{PH}=\frac{5\sqrt{2}}{2}+\frac{5\sqrt{6}}{6}$$
$$=\frac{15\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{6}=\frac{5\sqrt{2}(3+\sqrt{3})}{6}$$
$$=\frac{5\sqrt{6}(1+\sqrt{3})}{6}$$ 答　を得る。

参考（公式を活用する際，その先にどのような計算量が待ち構えているのかといった見通しを立てる力が必要となってきます）

正弦定理によって，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 60^\circ}=\dfrac{\mathrm{BP}}{\sin 45^\circ}$

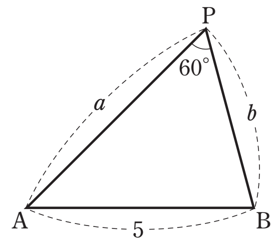
だから，$\mathrm{BP}=5\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{5\sqrt{6}}{3}$

が得られますが，この後，もう 1 つの線分 AP の長さについては，$\sin 75^\circ$ を独自で算出することが待ち構えています。つまり，数学Ⅱで習得する加法定理を利用しないで線分 AP の長さを算出することを考えていくと，上記の垂線 BH の果たす役割は大きいものと言えます。このようなことはいくつかの訓練などで身に付いているかと思いますが，意外と時間がかかってしまうような問題の可能性があるので，注意しておきたい問題の 1 つと言えます。

〔2〕

(2)〜(3)（FG Ⅰ A P.163 例題 91 〜 P.172 例題 98，P.174 例題 100，P.215 例題 125，P.218 18（同志社大）などを参照）

(Ⅰ)　$\theta=60^\circ$，$p=1$，$q=1$ のとき



余弦定理から，$25=a^2+b^2-2ab\cos 60^\circ$

∴ $a^2-ab+b^2=25$　……①　答

である。

このとき，題意から，$a>0$，$b>0$ なので題意の X を $X=a+b=k>0$ とおき，これを

$b=k-a$ として，①に用いると

$a^2-a(k-a)+(k-a)^2=25$

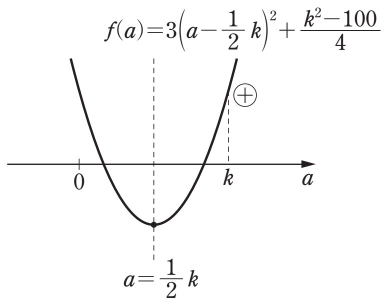
$3a^2-3ka+k^2-25=0$……②　答

が得られる。

そこで a についての 2 次方程式②において，a の解は $0<a<k$ のところに少なくとも 1 つの実数解をもたなければならないから，ここで，

$$f(a)=3a^2-3ka+k^2-25$$
$$=3\left(a-\frac{1}{2}k\right)^2+\frac{k^2-100}{4}$$

とおくと，上述したことから，

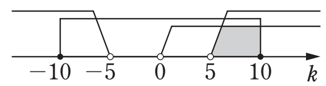


$$\begin{cases}\text{頂点：}\dfrac{k^2-100}{4}\leqq 0\\ \text{端点：}f(k)=k^2-25>0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}-10\leqq k\leqq 10\\ k<-5 \text{ または } k>5\end{cases}$$

をみたせばよいので以上より，求める $k=a+b$ のとり得る値の範囲はこれらの共通部分だから，

あ は，$5<k\leqq 10$　答　となる。



従って，$X=k$ の最大値は，上記の不等式において等号が成り立つときだから，

$k=a+b=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=10$　答　となる。

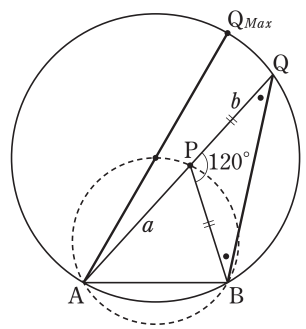
参考（図形的な視野からのアプローチ）

さて，上述させて頂きましたように，この(Ⅰ)ですが，次のように数学 A の分野で扱うこともできます。若干作図的な要素を含みながら解説を加えていきます。また，上述した中で，$k=a+b>5$ というのは，**三角形の成立条件**でもありますので，そのようなチェック機能を果たせるような，補助的な道具の活用も随時確認しておきたいところです。

点 P を中心にして，線分 PB を反時計回りに 120° 回転させ，点 B の移り先を Q とする。このとき，三角形 PBQ は頂角が 120°，底角が 30° の二等辺三角形となるから，∠PQB=30°

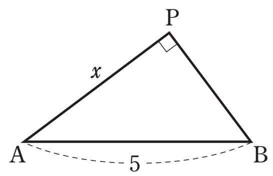
となるので，点 P が線分 AB に対して，常に ∠APB=60° を満たしながら動くことを考えた場合，点 Q はこれに伴い線分 AB に対して，常に ∠AQB=30° を満たしながら円の一部を動くことになるので，正弦定理から，その円の半径を R とすると，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin 30^\circ}=2R$　　∴ $R=5$

が得られ，点 Q は半径 5 の円の一部を動くことになり，線分 AQ=AP+PQ=AP+BP$=a+b$ がこの半径 5 の円の中心を通るときに，AQ は直径となるから，求める X の最大値は 10　答　である。



では(4)（FG Ⅱ B P.172 例題 92，P.283 例題 157 など参照）に進めてまいります。

(Ⅱ)　$\theta=90^\circ$，$p=4$，$q=3$ のとき



AP$=x$ とおくと，∠APB=90° だから，三平方の定理より，　$\mathrm{BP}=\sqrt{25-x^2}$

となる。このとき，題意の X を

$X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}=l$　……③

とおくと，

$4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}=4x+3\sqrt{25-x^2}$　……④

③と④から x に関する 2 次方程式

$l=4x+3\sqrt{25-x^2}$

$(l-4x)^2=(3\sqrt{25-x^2})^2$

$l^2-8lx+16x^2=9\cdot 25-9x^2$

$25x^2-8lx+l^2-225=0$　……⑤

が 1 つ得られるので，ここで，

$$g(x)=25x^2-8lx+l^2-225$$
$$=25\left(x-\frac{4}{25}l\right)^2+\frac{9l^2-15^2\cdot 5^2}{25}$$

とおくと，これは⑤においては，2 次方程式 $g(x)=0$ が $0<x<\dfrac{l}{4}$ のところに少なくとも 1 つの実数解をもてばよいので，

$$\begin{cases}\text{頂点：}\dfrac{9l^2-(15\cdot 5)^2}{25}\leqq 0\\ \text{端点：}g(0)=l^2-225>0\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases}-25\leqq l\leqq 25\\ l<-15 \text{ または } l>15\end{cases}$$

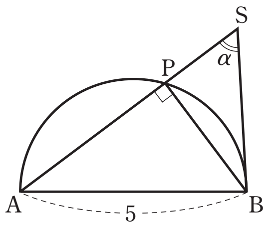
となる。従って，l のとり得る値の範囲は，これらの共通部分であるから，$15<l\leqq 25$ が得られるので，等号成立のときに最大値を与えるので，求める $X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}=l$ の最大値は

25　答　となる。

参考（数学 A や数学Ⅱなどの活用事例）

さてこの(Ⅱ)においても，次のように考えると，上述した(Ⅰ)と同じくして，数学 A の範囲の中で処理することが可能です。

線分 PB の長さを点 P からの距離を $\frac{3}{4}$ 倍にした線分 PS を考え，その線分 PS を点 P を中心にして反時計回りに 90° 回転させると，右上図のようになる。そこで X は，



$$X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}=4\left(\mathrm{AP}+\frac{3}{4}\mathrm{BP}\right)$$
$$=4(\mathrm{AP}+\mathrm{PS})=4\mathrm{AS}$$

と表すことができる。このとき，$\angle\mathrm{ASB}=\alpha$ とすると， $\mathrm{BP}:\mathrm{PS}=4:3$ より， $\tan\alpha=\frac{4}{3}$

であり，しかも α は鋭角だから，$\cos\alpha=\frac{3}{5}$

を満たす。点 P が線分 AB に対して，常に $\angle\mathrm{APB}=90°$ を満たしながら動くことを考えた場合，点 S はこれに伴い線分 AB に対して，常に

$\sin\alpha=\frac{4}{5}$ を満たしながら点 S は動くことになる。

しかも正弦定理から，点 S は

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\alpha}=2R' \qquad \therefore\ R'=\frac{25}{8}$$

の半径 R' をもつ円の一部を動くことになるので，このとき，求める $X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}=4\mathrm{AS}$ の最大値は，線分 AS が半径 R' の円の直径となるときだから， $4\cdot 2R'=25$ 答 となる。

しかも，この(II)については，数学IIの「**図形と方程式**」の分野で扱う内容であり，相性として良いためか，この図形と方程式の分野で特に取り上げられていることが多いのも事実です。つまり，この図形と方程式の分野で考えてみると，

$\mathrm{AP}=x>0$，$\mathrm{BP}=y>0$ とおき，三平方の定理から，

$$x^2+y^2=25 \quad \cdots\cdots⑥$$

が得られ，しかも求める

$$X=4x+3y=l>0 \quad \cdots\cdots⑦$$

とおくと，⑥と⑦において，**点と直線との距離の公式**を用いて，この後は処理することが可能となります。この場合，$x>0$，$y>0$ であることから，第一象限（x 軸と y 軸は含まない）だけでの処理となり，これはよく利用される話（技術）でもあります。このような素材を通して，様々な分野からのアプローチを成せるようにしておきたい事例の一つと言えるのではないでしょうか。

さらに，これは「**三角関数**」の分野でも扱う内容と言えます。

例えば，$\angle\mathrm{BAP}=\beta(0°<\beta<90°)$ とおくと，2つの線分はそれぞれ三角比を用いて

$$\mathrm{AP}=5\cos\beta,\ \mathrm{BP}=5\sin\beta$$

と表すことができ，これを用いて X を表すと，**三角関数の合成**によって，次のように変形していくことが可能となります。これも見通しが立てやすく，その後に待ち構えている計算などは分量として少ないものです。

$$X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP} \quad \cdots\cdots⑧$$
$$=5(3\sin\beta+4\cos\beta)$$
$$=25\sin(\beta+\phi)$$
$$\left(\phi\text{ は }\cos\phi=\frac{3}{5},\ \sin\phi=\frac{4}{5}\text{ を満たす}\right)$$

となり，この後，$\beta+\phi$ について考える（$\beta+\phi$ が 90° を越えるかという評価を行う）と，X の最大値は，$\beta+\phi=90°$ となるときに X の最大値を与えることがわかります。

また，上式の⑧については，数学Bで習得する「**ベクトル**」の**内積**を用いて処理する方法も考えられます。

では(5)に進めてまいります。

【⓪について：不等式の意味の理解】

(I)において，X の最小値が存在するかどうかについては，設問(3)の $\boxed{\text{あ}}$ より，

$X=\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=a+b$ のとり得る値の範囲は

$$5<a+b\leqq 10$$

だから，$a+b$ の最小値は存在しないので，

⓪は正しくない。

【①について：公式の確認と基本対称式の扱い方】

(I)において，$X=k$ が最大のとき，三角形 APB の面積は最大となるかどうかについては，三角形 APB の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}ab\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$$

であるから，ab が最大のとき S が最大と言える。

そこで，積 ab については，①から，

$$ab=a^2+b^2-25$$

であるが，これは基本対称式 $a+b$，ab を用いて

$$ab=(a+b)^2-2ab-25$$

と表すことができるので，ab について解くと，

$$ab=\frac{(a+b)^2-25}{3}=\frac{k^2-25}{3}\text{ となる。}$$

従って，$X=k=a+b$ が最大のとき，積 ab も最大となるから，三角形 APB の面積 S は最大となるので，**①は正しい。**

【②について：基本対称式の扱い方】

(I)における $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値は $\boxed{\text{ツテ}}$ の4倍に等しいかどうかについては，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$$
$$=k^2-2\cdot\frac{k^2-25}{3}=\frac{k^2+50}{3}$$

であり，しかも k のとり得る値の範囲は $5<k\leqq 10$ なので，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値は，等号が成り立つときの $k=10$ のときと言えるので，そのときの $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値は 50 となるので，この値は $\boxed{\text{ツテ}}$ のちょうど5倍である（4倍ではない）から，従って，**②は正しくない。**

【③について：面積の捉え方】

(II)における三角形 ABP の面積は，X のとり得る値に関係なく一定であるかどうかについては，

点 S が動くことによって，点 P の動きに伴い線分 AB からの距離（垂線は高さ）は変化するから，三角形 ABP の面積は，$X=4\mathrm{AP}+3\mathrm{BP}$ のとり得る値に関係があり，一定であるとは言えないので，**③は正しくない。**

【④について：基本対称式の扱い方】

(I)における $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ の最大値は，(II)における $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ の最大値を2倍した値に等しいかどうかについては，

(I)において，$\theta=60°$，$p=1$，$q=1$ では，

$$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=ab=\frac{k^2-25}{3}$$

だから，いま $5<k\leqq 10$ より，積 ab は $k=10$ のときに最大値 25 をとる。

(II)において，$\theta=90°$，$p=4$，$q=3$ では，

$x=\mathrm{AP}$，$y=\mathrm{BP}$ とおくと，三平方の定理から

$$x^2+y^2=25$$

を満たし，しかも $x+y=m$ とおき，$y=m-x$ として，上式に代入すると，

$$x^2+(m-x)^2=25$$
$$2x^2-2mx+m^2-25=0$$

となるから，ここで，

$$h(x)=2x^2-2mx+m^2-25$$
$$=2\left(x-\frac{1}{2}m\right)^2+\frac{m^2-50}{2}$$

とおくと，2次方程式 $h(x)=0$ が $0<x<m$ のところに少なくとも1つの実数解をもてばよいので，

$$\begin{cases}\dfrac{m^2-50}{2}\leqq 0\\ h(0)=m^2-25>0\end{cases}$$

より，これらの共通部分は

$$5<m\leqq 5\sqrt{2}$$

となるから，x^2+y^2 は基本対称式 $x+y$，xy を用いて $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

と表すことができて，いま $x^2+y^2=25$，$x+y=m$ だから，積 xy について解くと，

$$xy=\frac{m^2-25}{2}$$

となるので，この積 xy の最大値は $m=5\sqrt{2}$ のときに与えられるから，その最大値は

$$xy=\frac{(5\sqrt{2})^2-25}{2}=\frac{25}{2}$$

となる。これを2倍すると(I)の積 ab の最大値の 25 に等しくなるから，**④は正しい。**

また，この④については図形的な解決をもって処理することができます。

$\boxed{\text{ニ}}$：①，④

（過不足なくすべて選んでいること） 答

今回は図形の問題を題材とし，2次方程式，2次関数との絡みの中で生まれる「解の存在範囲」も加味させて頂きました。一方で図形的な分析を行い幾何学的な扱いも可能となる話もさせて頂き

ました。方針を変更しても繋がりをもった有機的な結びは新テストでも問われる内容かと感じています。

では，次の**サンプル問題（その 2）**についてですが，その解答や解説は次号の FG 通信で記したいと思います。

略歴

鶴迫 貴司　つるさこ たかし

大阪府生まれ。40歳。立命館大学理工学部数学物理学科卒業。同大学院修士課程修了。有名進学校を赴任し，現在は母校私立東山中学・高等学校で教壇に立つ。これまでの経験を活かし他府県の教育研究会や高校や大学での講師を務めるなど，生徒や教員向けのセミナーを行っている。今年4月からは数学雑誌『現代数学』の連載がスタートした。教科書を主軸にした自作教材を用いて授業実践を行い，毎年4月にはその春に行われた大学入試問題を分析した資料『受験数学Journal』を刊行している。その中では大学受験のみならず数学の面白さを紹介している。

e-mail : t_tsurusako@higashiyama.ed.jp

サンプル問題（その 2）

たかし君としんご君は次のような会話をして，文字列を作ろうとしています。$\boxed{\text{ア}}$～$\boxed{\text{ネ}}$には最適な数値を，また$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{い}}$には，選択肢の中から最適なものをそれぞれ選べ。

たかし君：大学入試センターを英語で表現すると National Center for University Entrance Examinations みたいだけど，この頭文字の一部の N，C，U を 1 つずつ使って 3 個の文字を横一列に並べてできるのは$\boxed{\text{ア}}$通りになるね。

しんご君：じゃあ N，C，U を 1 つずつ使って 3 個の文字を円形に並べてできるのは$\boxed{\text{イ}}$通りになるね。

たかし君：では，N，C，U の同じ文字を何回も書いてもよいとして，3 個の文字を横一列に並べてできるのは$\boxed{\text{ウエ}}$通りになるね。

しんご君：そうだね。じゃあ N，C，U の同じ文字を何回も使ってもよいとして，3 個の文字を円形に並べてできるのは$\boxed{\text{オカ}}$通りになるね。

このような会話の後，二人は**横一列**に並べてできる文字列について考えはじめた。

たかし君：では N，C，U の同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5 文字を書いたとき，全部で$\boxed{\text{キクケ}}$通りになるよね。

しんご君：そこで同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5 文字を書いたときに，N，C，U のすべての文字が書かれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{コサ}}}{\boxed{\text{シス}}}$ となるね。

たかし君：そうか。この確率は，5 人でじゃんけんを 1 回したときに，あいことなる確率 $\dfrac{\boxed{\text{セソ}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ と比べて，$\boxed{\text{あ}}$と言えるね。

しんご君：じゃあ，同じ文字を何回も使ってもよいものとして，5 文字を書いたときに，NCU という文字列が書かれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$ となるから，この確率の 3 倍は$\boxed{\text{い}}$と言えるね。

たかし君：ではそろそろ最後にしよう。同じ文字を何回も使ってもよいものとして，7 文字を書いたときに，NCU という文字列が 1 回書かれている確率は $\dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニヌネ}}}$ となるね。

【$\boxed{\text{あ}}$の選択肢（以下の中から最適なものを一つ選べ）】

⓪ 小さい　① 大きい　② 等しい

【$\boxed{\text{い}}$の選択肢（以下の中から最適なものをすべて選べ）】

⓪ 2 人でじゃんけんを 1 回して，1 人が勝つ確率に等しい
① 2 人でじゃんけんを 1 回して，あいことなる確率に等しい
② 3 人でじゃんけんを 1 回して，1 人が勝つ確率に等しい
③ 3 人でじゃんけんを 1 回して，2 人が勝つ確率に等しい
④ 3 人でじゃんけんを 1 回して，あいことなる確率に等しい
⑤ 4 人でじゃんけんを 1 回して，1 人が勝つ確率に等しい
⑥ 4 人でじゃんけんを 1 回して，2 人が勝つ確率に等しい
⑦ 4 人でじゃんけんを 1 回して，3 人が勝つ確率に等しい
⑧ 4 人でじゃんけんを 1 回して，あいことなる確率に等しい

東大複素数平面問題の背景 ～多面的に探る～

多面的に探る

岡山県立岡山朝日高等学校　山川 宏史

1．はじめに

大学入試では，近年複素数平面の問題が大幅に増加した。特に図形への応用分野の問題の出来が合否の大きな分かれ目となっている。今回機会を与えられたので，東大複素数平面の問題の背景について考察を加えてみることにした。なお，東大では2016年から3年連続でこの分野が出題され，頻出分野となっていることも特筆される。本気で志望している者は，この分野でも高得点を。

2．東大理科第5問について

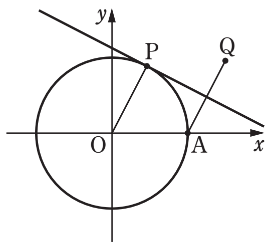
■問題■

> 複素数平面上の原点を中心とする半径1の円をCとする。点$\mathrm{P}(z)$はC上にあり，点$\mathrm{A}(1)$とは異なるとする。点Pにおける円Cの接線に関して，点Aと対称な点を$\mathrm{Q}(u)$とする。$w=\dfrac{1}{1-u}$とおき，wと共役な複素数を$\overline{w}$で表す。
>
> (1)　uと$\dfrac{\overline{w}}{w}$をzについての整式として表し，絶対値の商$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}$を求めよ。
>
> (2)　Cのうち実部が$\dfrac{1}{2}$以下の複素数で表される部分をC'とする。点$\mathrm{P}(z)$がC'上を動くときの点$\mathrm{R}(w)$の軌跡を求めよ。

▲複素数平面を全面に出した解答▲

(1)　接線方向を表す複素数は，zを原点の周りに$-\dfrac{\pi}{2}$回転した$\dfrac{z}{i}$である。また，接線に関して点Aと点Qは対称であるから，$\dfrac{u-z}{\frac{z}{i}}$と$\dfrac{1-z}{\frac{z}{i}}$は互いに共役な複素数である。

←発想は厳しいか？



$$\frac{u-z}{\frac{z}{i}}=\frac{1-\overline{z}}{\frac{\overline{z}}{-i}}\qquad u-z=-z\cdot\frac{1-\overline{z}}{\overline{z}}$$

$$u-z=-z\cdot\frac{z-z\overline{z}}{z\overline{z}}$$

$z\overline{z}=1$であるから，$u-z=-z(z-1)$

したがって，$u=2z-z^2$　……答　@やや易！

また，$w=\dfrac{1}{(z-1)^2}$であるから

$$\frac{\overline{w}}{w}=(z-1)^2\cdot\frac{1}{(\overline{z}-1)^2}$$

$$=(z-1)^2\cdot\frac{z^2}{z^2(\overline{z}-1)^2}=z^2\quad\text{……答}$$

@この設問は，ありがたい誘導

よって，

$$\frac{w+\overline{w}-1}{w}=1+z^2-(z-1)^2=2z$$

したがって，$\dfrac{|w+\overline{w}-1|}{|w|}=2|z|=2$　……答

@この設問は，(2)のための準備

(2)　(1)の最後の式の分母を払って両辺を2で割ると

$$\left|\frac{w+\overline{w}}{2}-\frac{1}{2}\right|=|w-0|$$

←この式変形ができれば，定義により放物線はすぐ出る。

よって，wは複素数平面上で原点と実部が$\dfrac{1}{2}$の複素数を表す直線から等距離にある。すなわち，これらをそれぞれ焦点，準線とする放物線上に存在する。題意より

$$\frac{2}{3}\pi\leqq\arg(z-1)\leqq\frac{4}{3}\pi$$

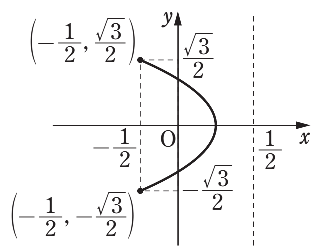
$w=(z-1)^{-2}$であるから，

$$-\frac{8}{3}\pi\leqq\arg w\leqq-\frac{4}{3}\pi$$

角を補正して，$-\dfrac{2}{3}\pi\leqq\arg w\leqq\dfrac{2}{3}\pi$

よって，求める軌跡は下図の放物線の一部。

……答



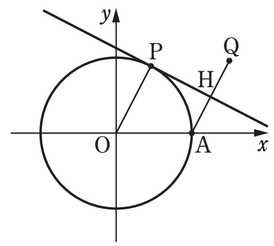
@$w=x+yi$(x，yは実数)とおく方法は計算が長く，特に実部の条件を直すのは大変ゆえ，略。なお，フォーカス・ゴールド数学Ⅲには，実践編P.809にそっくり問題「$z=1$のときの$\dfrac{2}{(z+1)^2}$の軌跡」が，しっかり収録されている。近畿大学の過去問で，もちろん答えは放物線に。やはり，この性質は知っている人は知っているのか。筆者は勉強不足を実感。今宵も独りで泣きながら反省を。

▲(1)の偏角を設定する解答▲

点Pにおける接線と直線AQとの交点をHとし$z=\cos\theta+i\sin\theta$ $(-\pi<\theta\leqq\pi,\ \theta\neq0)$とおくと，

$$\angle\mathrm{OPA}=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

$$\angle\mathrm{APH}=\frac{\pi}{2}-\angle\mathrm{OPA}=\frac{\theta}{2}$$



2点A，Qは直線PHに関して対称であるから

PA=PQ，∠APH=∠QPH

よって，∠APQ=θとなり，点Aを点Pを中心にθだけ回転した点がQになるから

$$u-z=(1-z)z$$

$$u=-z^2+2z\quad\text{……答}$$

(これは$\theta<0$のときも成り立つ。)

@これぞ，複素数の醍醐味。この図形的考察から，次のスーパー別解が生まれる。

▲(1)のスーパー別解▲

直線OPと接線ℓは点Pで直交するので，点Aの直線OPに関する対称点$\mathrm{A}'(z^2)$と点Qは点Pに関して対称である。

よって，$z=\dfrac{z^2+u}{2}$

ゆえに，$u=2z-z^2$　……答

@何と簡単，瞬殺とはこのこと。完解認定か。

3．東大理科第5問(1)の媒介変数表示の考察

▲極座標による解答▲

$\angle x\mathrm{AQ}=\angle\mathrm{AOP}=\theta$ $(-\pi<\theta\leqq\pi)$とおくと，点Aから直線OPに垂線を引くことにより，

$$\mathrm{AH}=1-\cos\theta$$

すなわち，点Aを極，半直線Axを始線とすると，点Qは極方程式$r=2(1-\cos\theta)$を満たす。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

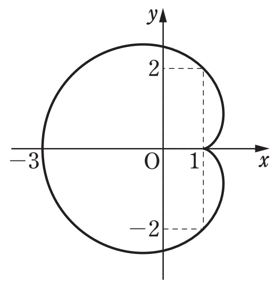
$$=(1,\ 0)+(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$
$$=(1+2(1-\cos\theta)\cos\theta,\ 2(1-\cos\theta)\sin\theta)$$
$$=(2\cos\theta-\cos2\theta,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$$

ゆえに，P$(\cos\theta,\ \sin\theta)$

Q$(2\cos\theta-\cos2\theta,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$

P(z) に対して，z^2 を表す複素数は $\cos2\theta+i\sin2\theta$ となるから，Q(u) は，$u=2z-z^2$ ……答

@2倍角の公式で z^2 にする場面も必要。

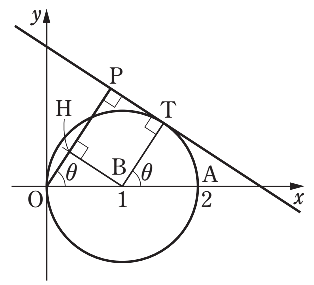


これにより，点Qの媒介変数表示が Q$(2\cos\theta-\cos2\theta,\ 2\sin\theta-\sin2\theta)$ となることがわかった。極が原点ではないが，cardioid になる。それを検証するには，図全体を y 軸に関して対称移動（θ を $\pi-\theta$ に変更）するとよい。確かに，$r=2(1+\cos\theta)$ となる。原題においては，単位円に半径1の円が点A(1，0)で外接している状態から，外側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点Aにいた点の軌跡である。もちろん，フォーカス·ゴールド数学Ⅲには，例題88としてしっかり収録されている。*** レベル。なお，類題が2005年岡山大学に出題され，長さの求値もついていた。

■岡山大学問題■

> Oを原点とする座標平面において，点Aの座標を(2，0)とする。線分OAを直径とする円周上の点Tにおける接線にOから下ろした垂線をOPとする。Tが円周上を動くとき，Pが描く曲線の長さを求めよ。

▲解答▲ B(1，0)とし，Bから直線OPに下ろした垂線をBHとする。



$\angle ABT=\theta$ とすると，$\angle AOP=\theta$ である。

また，OH$=\cos\theta$，PH$=1$ であるから，P$(x,\ y)$ とおくと

$x=(1+\cos\theta)\cos\theta,\ y=(1+\cos\theta)\sin\theta$

これは，$\theta>\dfrac{\pi}{2}$ などのときにも成り立つ。

$$\frac{dx}{d\theta}=(-\sin\theta)\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$
$$=-\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta=-\sin\theta-\sin2\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=(-\sin\theta)\sin\theta+(1+\cos\theta)\cos\theta$$
$$=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta=\cos\theta+\cos2\theta$$
$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2$$
$$=1+1+2(\cos2\theta\cos\theta+\sin2\theta\sin\theta)$$
$$=2+2\cos\theta=4\cos^2\frac{\theta}{2}$$

よって，$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{d\theta}\right)^2}=2\left|\cos\dfrac{\theta}{2}\right|$

したがって，求める曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$ ……答

@お馴染み cardioid の長さ

@長さを求める際に，cos の加法定理の逆変形をするのが初見で解くにはやや厳しい。むしろ，極座標の長さ公式を証明してから適用するほうが賢いし，汎用性に富む。具体的には

別解 極座標系で考えると，$r=1+\cos\theta$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ であるから

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\cos\theta-r\sin\theta$$
$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{dr}{d\theta}\sin\theta+r\cos\theta$$
$$\frac{dr}{d\theta}=-\sin\theta$$
$$\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\sin^2\theta+r^2\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}$$

←ここの部分が極座標系の長さ公式に

$$=\sqrt{\sin^2\theta+1+2\cos\theta+\cos^2\theta}$$
$$=\sqrt{2(1+\cos\theta)}$$
$$=2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$$

よって，求める曲線の長さは，

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$
$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$
$$=4\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}=8$$ ……答

@このほうが，計算の見通しがよい。なお，フォーカス·ゴールドには斜軸回転の傘型積分やバウムクーヘン積分が掲載されている点はさすがであるが，極座標系の面積公式，長さ公式は掲載されていない。せめて実践編にあればよいのだが。私見であった。

オマケ

2018年大阪大学理系第3問には hypocycloid が出題されていた。媒介変数表示が似ている。

■大阪大学問題■

> 2つの関数
>
> $f(t)=2\sin t+\cos2t,\ g(t)=2\cos t+\sin2t$
>
> を用いて定義される座標平面上の曲線
>
> $C:x=f(t),\ y=g(t)\ \left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$
>
> を考える。
>
> (1) t が $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，$f(t)$ および $g(t)$ の最大値を求めよ。
>
> (2) t_1，t_2 を $0\leqq t_1<t_2\leqq\dfrac{\pi}{2}$ かつ $f(t_1)=f(t_2)$ を満たす実数とする。このとき，$g(t_1)^2-g(t_2)^2>0$ が成り立つことを示せ。
>
> (3) C と直線 $x=1$ が囲む領域の面積 S を求めよ。

▲解答▲

(1) $f'(t)=2\cos t-2\sin2t=2\cos t(1-2\sin t)$

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	1

上の増減表により，$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。……答

$$g'(t)=-2\sin t+2\cos2t$$
$$=-2(2\sin^2t+\sin t-1)$$
$$=-2(\sin t+1)(2\sin t-1)$$

t	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	2	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

上の増減表により，$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。……答　@易！

(2) 証明 $f(t_1)=f(t_2)$ のとき，

$2\sin t_1+1-2\sin^2t_1=2\sin t_2+1-2\sin^2t_2$

$\sin t_1-\sin t_2=\sin^2t_1-\sin^2t_2$

$\sin t_1\neq\sin t_2$ であるから $\sin t_1+\sin t_2=1$

$$g(t)^2=\{2\cos t(1+\sin t)\}^2$$
$$=4(1-\sin^2t)(1+\sin t)^2$$
$$=4(1-\sin t)(1+\sin t)^3$$

であるから，

$\sin t_1 = s$ とおくと，$\sin t_2 = 1-s$，

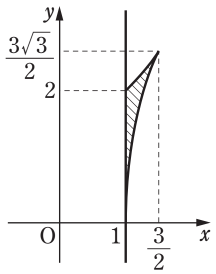
$0 \leqq t_1 < \dfrac{\pi}{6}$ より，$0 \leqq s < \dfrac{1}{2}$　……①

$$g(t_1)^2 - g(t_2)^2 = 4(1-s)(1+s)^3 - 4s(2-s)^3$$
$$= 4(1+2s-2s^3-s^4) - 4(8s-12s^2+6s^3-s^4)$$
$$= 4(1-6s+12s^2-8s^3) = 4(1-2s)^3 > 0$$

（∵①より）　終

@これは計算が重い。大阪大学受験者には無理か。点のプロットで概形をかけば十分かと。

(3)　(1)，(2)により，曲線の概形は次の図。

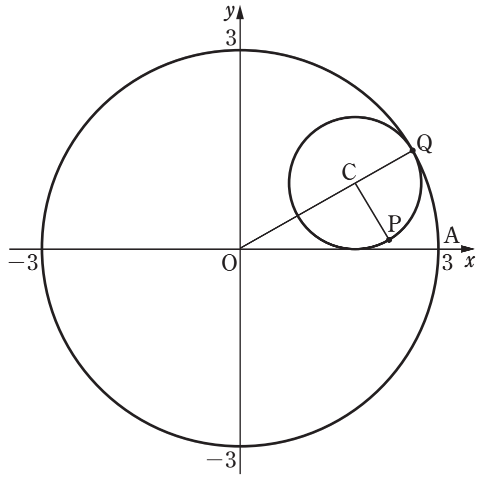


$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{6}$ のときの y を $y = g_1(t)$，$\dfrac{\pi}{6} \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のときの y を $y = g_2(t)$ とすると，

$$S = \int_1^{\frac{3}{2}} g_1(t)\,dx - \int_1^{\frac{3}{2}} g_2(t)\,dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} g(t)f'(t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} g(t)f'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos t + \sin 2t)(2\cos t - 2\sin 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos^2 t - 2\cos t \sin 2t - 2\sin^2 2t)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 + 2\cos 2t - 4\cos^2 t \sin t + \cos 4t - 1)\,dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos 2t + \cos 4t + 1 - 4\cos^2 t \sin t)\,dt$$
$$= \left[\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t + t + \frac{4}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3} \quad \cdots\cdots \text{答}$$

@(2)の重たい計算のあとでは，体力の限界かと。試験会場では非常に厳しい。

実際に hypocycloid であることを検証してみよう。



中心原点，半径 3 の円に点 A(3，0) で内接する半径 1 の円を考える。内側の円が滑ることなく転がったときの初期状態で点 A にいた点の軌跡を求める。軌跡上の点を P とし，内側の円の中心を C，$\angle x\mathrm{OC} = \theta$ とおくと，接点 Q に対して $\angle \mathrm{PCQ} = 3\theta$ であるから，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{CP}} = (\cos(\theta - 3\theta),\ \sin(\theta - 3\theta))$

$= (\cos 2\theta,\ -\sin 2\theta)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CP}}$

$= (2\cos\theta + \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

よって，$\mathrm{P}(2\cos\theta + \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

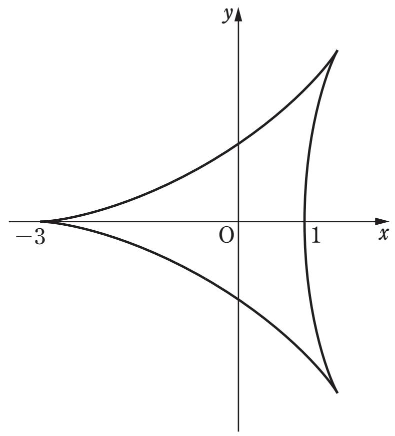
これが，標準的な hypocycloid の媒介変数表示である（円の半径の比が 1：4 ならば asteroid）が，大阪大学の問題は，優秀な受験生にばれないように（？）y 軸対称移動し，逆回転で始点も変更している。具体的には，y 軸に関する対称点

$(-2\cos\theta - \cos 2\theta,\ 2\sin\theta - \sin 2\theta)$ をとり，

$\theta - \dfrac{\pi}{2} = t$ とおくと座標は，

$$\left(-2\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - \cos 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right) - \sin 2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

すなわち $(2\sin t + \cos 2t,\ 2\cos t + \sin 2t)$ となり，大阪大学の問題と座標の媒介変数表示が完全に一致する。



@これなら，そうとう優秀な受験生でも，hypocycloid とは気づきにくい。よくぞ工夫したが，普通の設定で $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲の曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めさせたほうが入学者選抜としての弁別度があったものを。

誠に残念。昨年度は物理で，今年度は数学で大阪大学関係者は猛省すべし。昨年度は神戸大学・理系数学が酷かった。入試問題に弁別度は非常に重要なことは言うまでもない。

5．生徒への今後の指導について

新課程入試の目玉である複素数平面の問題が出題され続けることは間違いない。しばらくの間は，典型問題をまんべんなく演習し，準備しておけば一応大丈夫であろう。ただし，この分野が理系合否の鍵を握ることも間違いないので，微積分の計算の次に精度の高い完成度にもっていく必要がある。基礎になる三角関数の計算技術の完成も要求される。また，近い将来にはマンネリ化の影響で，図形問題を中心に高度な問題が増加することも予想される。例えば，曲線 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した曲線の方程式を求めるなど，この分野で学習指導要領に触れられていないような出題も十分ありうる。

超難関大学などでは特殊な訓練が要求されることも今後は大いに予想されるので，指導する側が日々研究することが第一に重要であるし，指導者の個人的な力量の差が出る分野であろう。それゆえ，教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。皆さん，お互いに謙虚に切磋琢磨いたしましょう。なお，本論文のスーパー解法は，すべて筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により，暗算能力は格段に進歩することができた。最後になりましたが，読者諸賢のご精読と発表の機会をくださった啓林館さんに感謝します。

e−mail：yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献

(1)　啓林館フォーカス・ゴールド数学Ⅲ

(2)　山川宏史膨大なデータベース，休日遠距離ロードにおける珠玉の思考

多面的に探る 多面的に探る問題実践例

中央大学　藤田 岳彦

近頃，新指導要領が発表され，また，新テストも数年後に導入されるということで高校数学教育も少し変化が必要と思われる。その一つとしてアクティブラーニングの導入が挙げられるが，筆者はアクティブラーニングをどのように授業に取り入れるかについての一つの取り組みとして，「一つの重要な例題を取り上げ，ただそれを解くのではなく，皆で議論しあい，いろいろな方法で解く」という方法を提案したい。この方法は大学の研究室や，研究者同士の討論等でよく行われている手法であり，ぜひ高校生にもチャレンジしてほしい。また，色々な角度から考えることが出来る問題は，それ自身が非常に重要であることに注意しておく。

ここでは，

> 問題：x，y が $x>0$，$y>0$，$x^2+y^2=1$ を満たすとき，xy の最大値を求めよ。

という問題を取り上げ，色々な解法を示してみよう。

1．相加平均・相乗平均

相加平均・相乗平均の関係より，

$$1=x^2+y^2\geqq 2\sqrt{x^2y^2}=2xy$$

が成り立つ。等号が成立するのは，

$x^2=y^2$ のときであり，これと $x>0$，$y>0$，

$x^2+y^2=1$ から，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

よって，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$

2．微分法

$y=\sqrt{1-x^2}$ より，$f(x)=x\sqrt{1-x^2}$　$(0<x<1)$ を考える。

$f'(x)=\dfrac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$f(x)$ の増減は次のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

よって，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

以下，結論は同じなので省略し，考え方のみを記す。

3．2次関数

$f(x)=x\sqrt{1-x^2}=\sqrt{x^2-x^4}$ を考え，$x^2=t$ とおくと，

$$x^2-x^4=t-t^2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

より，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大となる。

4．三角関数①

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおけるので，

$$xy=\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

よって，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，xy は最大となる。

5．コーシー・シュワルツの不等式

> コーシー・シュワルツの不等式
> $(ac+bd)^2\leqq(a^2+b^2)(c^2+d^2)$
> 等号が成立するのは，$a:b=c:d$ のとき

コーシー・シュワルツの不等式より，

$2xy=xy+yx$

$=|xy+yx|\leqq\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2}=1\cdot 1=1$

が成り立つ。等号が成立するのは，

$x:y=y:x$ すなわち $x=y$ のとき。

6．三角関数②

解答 4．において，

$$\frac{d}{d\theta}\sin\theta\cos\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

より，$g(\theta)=\sin\theta\cos\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，その増減は次のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$g'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$g(\theta)$		$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

よって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大となる。

7．$xy=a$ ①

$xy=a$ とおくと，$y^2=\dfrac{a^2}{x^2}$

よって，$x^2=t$，$a^2=A$ とおくと，

$$1=x^2+y^2=x^2+\frac{a^2}{x^2}=t+\frac{A}{t}$$

より，$t=t^2+A$ となるので，2次方程式 $t^2-t+A=0$ が $0<t<1$ の範囲に解をもつ条件を求める。

$h(t)=t^2-t+A$ とおくと，$h(0)\cdot h(1)=A^2>0$ より，この2次方程式は $0<t<1$ の範囲に1つだけの実数解をもつことはありえないので，重解を含めて2つの実数解をもつときを考える。

このとき，$y=h(t)$ のグラフは下に凸であり，その軸は $t=\dfrac{1}{2}$ であるから，2次方程式の判別式を D とすると，

$$h(0)>0,\ h(1)>0,\ D=1-4A\geqq 0,\ 0<\frac{1}{2}<1$$

となり，これより，$0<A\leqq\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

等号が成り立つとき，$t=\dfrac{1}{2}$ であるから，

$$(x,\ y)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

8．$xy=a$ ②

解答 7．において，

$A=t-t^2=-\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ であるから，これと $0<t<1$ より，$0<A\leqq\dfrac{1}{4}$ が成り立つ。

9．$xy=a$ ③

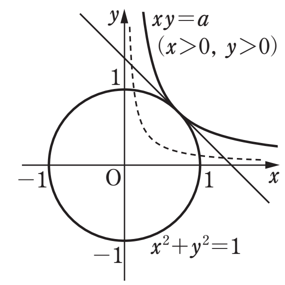
解答 8．において，$\dfrac{dA}{dt}=1-2t$

より，A の増減は次のようになる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{2}$	$\cdots$	1
$\dfrac{dA}{dt}$		$+$	0	$-$	
A		$\nearrow$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最大となる。

10．$xy=a$ と $x^2+y^2=1$ の交点



上の図より，直角双曲線 $xy=a$ と，円 $x^2+y^2=1$ の共有点を $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ とすると，点 A でのそれぞれの接線が一致するとき，a は最大となる。

直角双曲線 $xy=a$ の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線

$y_1x+x_1y=2a$　……①

円 $x^2+y^2=1$ の点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$ における接線

$x_1x+y_1y=1$ ……②

①，②が一致するから，$x_1=\dfrac{y_1}{2a}$，$y_1=\dfrac{x_1}{2a}$

より，$2a=1$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

このとき，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

11. 同次変形①

$t=\dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$xy=\frac{xy}{1}=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{t}{1+t^2}$$

ここで，$h>0$ とすると，$h=\dfrac{t}{1+t^2}$

⟺2次方程式 $ht^2-t+h=0$ が $t>0$ の範囲に解をもつ

⟺この2次方程式の判別式を D とすると，

$D=1-4h^2\geqq 0$

($f(t)=ht^2-t+h$ とすると，軸の方程式は $t=\dfrac{1}{2h}>0$ であり，$f(0)=h>0$ であるため。)

等号が成り立つのは，$t=1$，すなわち，$x=y$ のとき。

12. 同次変形②

解答11．において，$h(t)=\dfrac{t}{1+t^2}$ とおくと，

$h'(t)=\dfrac{1-t^2}{(1+t^2)^2}$ より，この増減は次のようになる。

t	0	…	1	…
$h'(t)$	/	$+$	0	$-$
$h(t)$	/	↗	$\frac{1}{2}$	↘

よって，$t=1$ のとき最大となる。

13. 同次変形③

解答12において，相加平均・相乗平均の関係より，

$$h(t)=\frac{t}{1+t^2}=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}\leqq\frac{1}{2\sqrt{t\cdot\frac{1}{t}}}=\frac{1}{2}$$

が成り立ち，等号は $t=1$ のとき成り立つ。

よって，$t=1$ のとき最大となる。

14. 直線 $y=x$ に関する折り返しベクトル

$\vec{a}=(x,\ y)$，$\vec{b}=(y,\ x)$ とおくと，

$2xy=xy+yx=\vec{a}\cdot\vec{b}\leqq|\vec{a}||\vec{b}|$

$=\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{y^2+x^2}=1\cdot1=1$

が成り立つ。

等号が成立するのは，$\vec{a}=k\vec{b}$ となる実数 $k>0$ が存在するときであり，$\vec{a}=(x,\ y)$，$\vec{b}=(y,\ x)$ より，$\vec{a}=\vec{b}$

すなわち，$(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき。

15. 大学数学① ラグランジュの未定係数法

$L(x,\ y,\ \lambda)=xy-\lambda(1-x^2-y^2)$ とおき，

$\dfrac{\partial L}{\partial x}=y+2\lambda x=0$，$\dfrac{\partial L}{\partial y}=x+2\lambda y=0$，

$\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=1-x^2-y^2=0$

を全て満たす $x,\ y,\ \lambda$ を考える。

このとき，

$1=x^2+y^2=(-2\lambda y)^2+(-2\lambda x)^2$

$=4\lambda^2(x^2+y^2)=4\lambda^2$

であり，$x>0$，$y>0$ より $\lambda=-\dfrac{1}{2}$

これより，残りの $x,\ y$ についても，

$x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，求める最大値は，$xy=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{1}{2}$

(正確には上の解答では極値しか求めていないが，本問では極値は極大値であることや，またそのとき最大値となることは明らかである)

16. 大学数学② 2次形式（線形代数）

$xy=(x,\ y)\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ ここで，実対称行列

$A=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$ の固有値は，

$|A-\lambda E|=\lambda^2-\dfrac{1}{4}=0$ を解いて，$\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$

よって，求める最大値は $\dfrac{1}{2}$

(上記の解法で最大値が求められる理由)

A の固有値 $\dfrac{1}{2}$ に対する固有ベクトルを $\vec{a}$，固有値 $-\dfrac{1}{2}$ に対する固有ベクトルを $\vec{b}$ とおくと，

A は実対称行列より，$\vec{a}\perp\vec{b}$

よって，行列の対角化 $P^{-1}AP$ を考えると，P は直交行列となるから，

${}^tP$(P の転置行列)$=P^{-1}$ が成り立つ。

したがって，${}^tPAP=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ 0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ とできる。

よって，$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ とおくと，

$$xy=(x,\ y)A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(x,\ y){}^tP^{-1}{}^tPAPP^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

$$=(x',\ y')\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\ 0&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x'^2-y'^2)\quad\cdots\cdots①$$

とできる。

ここで，P は直交行列であるから，

$x'^2+y'^2=x^2+y^2=1$ ……②

①，②より，

$xy=\dfrac{1}{2}(x'^2-y'^2)\leqq\dfrac{1}{2}x'^2\leqq\dfrac{1}{2}$

等号は $x'=1$ のとき成り立つ。

等号は $y'=0$ のとき成り立つ。

であるから，$x'=1$，$y'=0$ のとき xy は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

($\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ を用いて $x'=1$，$y'=0$ を $x,\ y$ に変換すると，$x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる)

一般に，A を n 次の実対称行列とし，その固有値を $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\cdots,\ \lambda_n$ とすると，

その2次形式について，

$${}^t\vec{x}A\vec{x}={}^t\vec{x}\,{}^tP^{-1}\,{}^tPAPP^{-1}\vec{x}$$

$$={}^t(P^{-1}\vec{x})\begin{pmatrix}\lambda_1&&&0\\ &\lambda_2&&\\ &&\ddots&\\ 0&&&\lambda_n\end{pmatrix}(P^{-1}\vec{x})$$

となり，$|\vec{x}|=1$ のとき，A の固有値の中で最大のものを M，最小のものを m とすると，

${}^t\vec{x}A\vec{x}$ の最大値は M となり，最小値は m となる。

これは非常に重要な定理である。

17. 回転行列

$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&-\sin\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\\ \frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ とおくと，

$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{4}&\sin\frac{\pi}{4}\\ -\sin\frac{\pi}{4}&\cos\frac{\pi}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{x+y}{\sqrt{2}}\\ \frac{-x+y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

また，$x^2+y^2=1$ より，$x'^2+y'^2=1$

ここで，$xy=\dfrac{x'-y'}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{x'+y'}{\sqrt{2}}=\dfrac{x'^2-y'^2}{2}$

以下は，解答16と同様。

18. 凸性

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}\leqq\frac{(x+y)^2}{4}$$

$$=\left(\frac{x+y}{2}\right)^2\leqq\frac{x^2+y^2}{2}$$

が成り立つ。等号が成り立つのは，$x=y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき。

よって，求める最大値は，

$$\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}=\frac{1}{2}$$

19. 図形① 面積

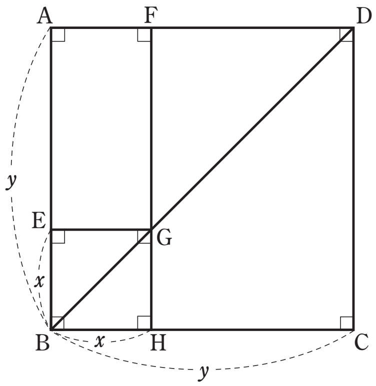
下の図のような正方形 ABCD を考えると，

(長方形 ABHF の面積)$=xy$

(△BHG の面積 ＋△ABD の面積)$=\dfrac{x^2+y^2}{2}$

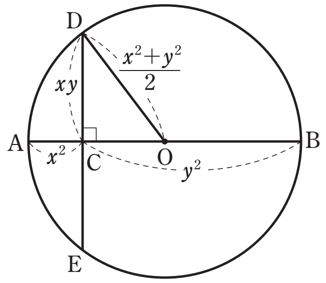
である。

よって，下図より，$xy\leqq\dfrac{x^2+y^2}{2}$ が成り立つ。



20. 図形② 方べきの定理

次の図のように，長さ x^2+y^2 の線分 AB を直径とする円 O を考える。



線分 AB を $x^2:y^2$ に内分する点を C とし，

点 C を通り線分 AB に垂直な直線と円 O の交点を D，E とする。

このとき，DC＝CE であるから，

方べきの定理より，DC･CE＝AC･CB

すなわち，$DC^2=x^2y^2$

$x>0$，$y>0$ より，$DC=xy$

DC の長さは半径以下であるから，

$xy\leqq\dfrac{x^2+y^2}{2}$ が成り立つ。