啓林館 高校数学 教育情報誌

啓林館

フォーカスゴールド
Focus Gold 通信

p.2-12 [特集]

新課程入試の特徴
～複素数平面を探る～

岡山県立岡山朝日高等学校　山川宏史

授業実践記録 p.13-34

◆ **進路目標に対応した数学の指導法**
～難関大学受験に必要な数学的概念～
茨城県立牛久高等学校　佐藤貴弘

◆ **面積公式からの拡張**
～トヨシマの定理?～
香川県立観音寺第一高等学校　豊嶋弘文

◆ **ガモフの宝探しの拡張と一般化**
秋田市立秋田商業高等学校　野呂耕一郎

vol.13

特集

新課程入試の特徴
～複素数平面を探る～

岡山県立岡山朝日高等学校　山川宏史

1．はじめに

昨年度の大学入試は，新課程入試２年目で旧課程生措置が撤廃され，複素数平面の問題が大幅に増加すると予測されていた。大方の予測通り，多数の大学が複素数平面の種々の典型・頻出問題を出題し，特に図形への応用での弁別度が高かった。今後も複素数平面の問題には同様な傾向が続き，合否の大きな分かれ目になると考えられる。今回機会を与えられたので，東大，九州大学前期，東北大学前期・後期の特徴のある問題についてさまざまな角度から考察を加えてみることにした。

2．東大理科第４問について

【問題】
z を複素数とする。複素数平面上の３点 A(1)，B(z)，C(z^2) が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。

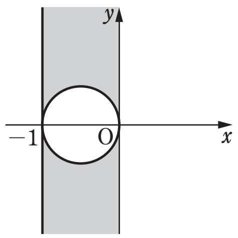
【標準的な解答】
三角形の３辺の長さが $|z-1|$，$|z^2-z|$，$|z^2-1|$ であるから，求める条件は

$z\fallingdotseq 0,\ \pm1$ かつ $|z-1|^2<|z^2-z|^2+|z^2-1|^2$
かつ $|z^2-z|^2<|z^2-1|^2+|z-1|^2$ かつ
$|z^2-1|^2<|z-1|^2+|z^2-z|^2$

であり，これは三角形の成立条件も含んでいる。
$|z-1|^2(\fallingdotseq 0)$ で各辺を約すと
$1<|z|^2+|z+1|^2$ かつ $|z|^2<|z+1|^2+1$
かつ $|z+1|^2<1+|z|^2$
ここで $z=x+yi$（x，y は実数）とおくと
$1<x^2+y^2+x^2+2x+1+y^2$ かつ
$x^2+y^2<x^2+2x+1+y^2+1$
かつ $x^2+2x+1+y^2<1+x^2+y^2$
よって
$x^2+x+y^2>0$ かつ $x>-1$ かつ $x<0$
したがって

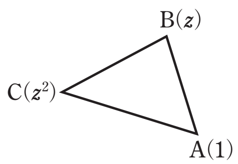
$$-1<x<0 \text{ かつ } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$ ……答

存在範囲は，右図の色のつけた部分で境界線を含まない。……答



共役複素数を用いる解法は，あえて避けた。三角形の成立条件も含むことのコメントまで受験生ができたかどうかは大いに疑問。

【暗算でできるスーパー解答】
３点が異なるので
$z\fallingdotseq 0,\ \pm1$
偏角 θ を $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲で考えることにする。



$$\angle \mathrm{BAC}=\arg\frac{z^2-1}{z-1}=\arg\{z-(-1)\}$$

∠BAC が鋭角である条件は $\mathrm{Re}\,z>-1$

$$\angle \mathrm{CBA}=\arg\frac{1-z}{z^2-z}=\arg\frac{-1}{z}=\arg\frac{1}{z}\pm\pi$$

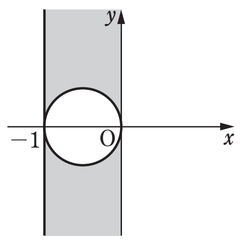
∠CBA が鋭角である条件は $\mathrm{Re}\,z<0$

$$\angle \mathrm{ACB}=\arg\frac{z-z^2}{1-z^2}=\arg\frac{z}{1+z}=\arg\frac{z-0}{z-(-1)}$$

D(−1) とすると，∠ACB が鋭角である条件は，∠DBO が鋭角である。これは，線分 OD を直径とする円の外部である。
以上から，$z=x+yi$（x，y は実数）とおくとき

$$-1<x<0 \text{ かつ } \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$ ……答

存在範囲は，右図の色のつけた部分で境界線を含まない。……答



何と簡単！暗算レベル。試験会場ではこうはいくまい。合格した生徒にこの解法を教えたら，唖然としていた。しかし，すぐに納得していたのはさすが。

3．東大文科第１問について

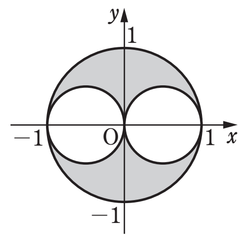
【問題】
座標平面上の３点 P(x，y)，Q($-x$，$-y$)，R(1，0) が鋭角三角形をなすための (x，y) についての条件を求めよ。また，その条件をみたす点 P(x，y) の存在範囲を図示せよ。

【標準的な解答】
求める条件は (x，y)$\fallingdotseq$(0，0)，(±1，0) で
$\mathrm{PQ}^2<\mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2$ かつ $\mathrm{QR}^2<\mathrm{RP}^2+\mathrm{PQ}^2$ かつ
$\mathrm{RP}^2<\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$
であり，これは三角形の成立条件も含んでいる。
$4x^2+4y^2<x^2+2x+1+y^2+x^2-2x+1+y^2$
かつ $x^2+2x+1+y^2<x^2-2x+1+y^2+4x^2+4y^2$
かつ $x^2-2x+1+y^2<4x^2+4y^2+x^2+2x+1+y^2$
よって，$x^2+y^2<1$ かつ $x^2-x+y^2>0$
かつ $x^2+x+y^2>0$

したがって，$x^2+y^2<1$ かつ $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$

かつ $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$ ……答

存在範囲は，右図の色のつけた部分で境界線を含まない。……答

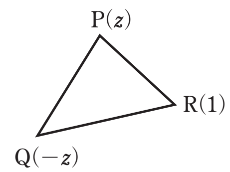


文系ゆえ，図形と方程式の問題として出題された。三角形の成立条件も含むことのコメントまで受験生ができたかどうかは大いに疑問。文系ゆえ，採点上は不問にしたと思われる。

【暗算でできる文転理系のスーパー解答】
３点が異なるので (x，y)$\fallingdotseq$(0，0)，(±1，0)
$z=x+yi$（x，y は実数）とし，偏角 θ を $-\pi\leqq\theta<\pi$ の範囲で考えることにする。

$$\angle \mathrm{PRQ}=\arg\frac{-z-1}{z-1}=\arg\frac{z-(-1)}{z-1}\pm\pi$$

S(−1) とすると，∠PRQ が鋭角である条件は，∠RPS が鈍角である。



これは，線分 SR を直径とする円の内部である。

$$\angle \mathrm{QPR}=\arg\frac{1-z}{-z-z}=\arg\frac{z-1}{z-0}$$

∠QPR が鋭角である条件は，∠OPR が鋭角である。
これは，線分 OR を直径とする円の外部である。

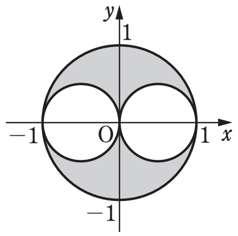
$$\angle \mathrm{RQP}=\arg\frac{z-(-z)}{1+z}=\arg\frac{z-0}{z-(-1)}$$

∠RQP が鋭角である条件は，∠SPO が鋭角である。
これは，線分 OS を直径とする円の外部である。
以上から

$$x^2+y^2<1 \text{ かつ } \left(x-\frac{1}{2}\right)+y^2>\frac{1}{4}$$

$$\text{かつ } \left(x+\frac{1}{2}\right)+y^2>\frac{1}{4}$$ ……答

存在範囲は，右図の色のつけた部分で境界線を含まない。……答



何と簡単！やはり暗算レベル。しかし，$\pm\pi$ の角の補正が難しく，試験会場ではこうはいくまい。理系問題よりも計算自体は難しいのがよくわかる。

★文系理系の問題比較★

文理とも小問なしの一発問題であった。また，異分野における文理共通ネタとして今後の見本となる作品といえる。加法定理の証明，$\pi>3.05$ の証明など，東大は先駆者的な見本問題がお得意。

問題の条件そのものは，理系問題のほうが複雑に見える。しかし，理系は三角形の3辺の長さが $|z-1|$，$|z^2-z|$，$|z^2-1|$ であるから $|z-1|$ で約すと，1，$|z|$，$|z+1|$ となる。約すアイディアは，2004年一橋大学の過去問にあった。実は，昨年度の3年生は理系東大直前講座で触れていた。これに対して，文系問題は3辺の長さが $|z-1|$，$|z+1|$，$|2z|$ と約分できないので，こちらのほうが条件が複雑になり文理で逆転現象が起こっていることがよくわかる。これも複素数平面の妙か。

あの東大がそこまで考えて出題していたとは思えない。このあたりの裏話を，例年学習院大学で実施される入試問題研究会で教えてくれるとよいのだが残念。

4．九州大学前期理系第5問について

一方，九州大学前期の問題は細かく小問に分かれていた。一瞥して各小問が独立にしか見えないが，よく研究すると，実はつながりがあることがわかる。これもしっかりと味わってみよう。ただし，時間制限のある選抜試験でこれが味わえた受験生は皆無と思われる。高校・予備校の先生すら味わえたかどうかは疑問。また，既刊の参考書・問題集に至っても執筆者がこれを見抜いていたかどうかは疑問。せっかくの大学のねらいが無駄になった典型例といえる。

【問題】

以下の問いに答えよ。

(1)　θ を $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\ \sin n\theta=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　次の方程式を満たす実数 $x\,(0\leqq x<2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$$

(3)　次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{9}{4}$$

【標準的な解答】

(1)　(証明) ド・モアブルの定理により

$$z^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \cdots\cdots ①$$

$$\frac{1}{z^n}=\cos n\theta-i\sin n\theta \quad \cdots\cdots ②$$

①＋②より，$z^n+\dfrac{1}{z^n}=2\cos n\theta$

よって，$\cos n\theta=\dfrac{1}{2}\left(z^n+\dfrac{1}{z^n}\right)$

①－②より，$z^n-\dfrac{1}{z^n}=2i\sin n\theta$

よって，$\sin n\theta=-\dfrac{i}{2}\left(z^n-\dfrac{1}{z^n}\right)$　終

(教科書例題レベル)

(2)　和積交換公式，倍角の公式により

$$2\cos\frac{3}{2}x\cos\frac{1}{2}x-\left(2\cos^2\frac{3}{2}x-1\right)=1$$

$$\cos\frac{3}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x-\cos\frac{1}{2}x\right)=0$$

$$-2\cos\frac{3}{2}x\sin x\sin\frac{1}{2}x=0$$

$0\leqq x<2\pi$ であるから，

$\dfrac{3}{2}x=\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{5}{2}\pi$ または $x=0$，π

よって，$x=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，π，$\dfrac{5}{3}\pi$　……答

(3倍角の公式の利用も可。なお，その証明に(1)を用いることもできるが，やり過ぎ。)

(3)　(証明) 半角の公式，和積交換公式により

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 80^\circ)+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(1-\cos 160^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(2\cos 100^\circ\cos 60^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos 100^\circ+\cos 80^\circ)$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(-\cos 80^\circ+\cos 80^\circ)$$

$=$(右辺)　終

(入試問題標準レベル)

【九州大学の希求した？解答】

(2)　$z=\cos x+i\sin x$ とおく。(1)の前半により

$$\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-\frac{1}{2}\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)=1$$

$z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと

$$t+(t^2-2)-(t^3-3t)=2$$

$$t^3-t^2-4t+4=0$$

$$(t-1)(t^2-4)=0$$

よって $t=1$，± 2

$z+\dfrac{1}{z}=1$ のとき

$z^2-z+1=0$　$z=\dfrac{1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $x=\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{5}{3}\pi$

$z+\dfrac{1}{z}=2$ のとき

$z^2-2z+1=0$　$z=1$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $x=0$

$z+\dfrac{1}{z}=-2$ のとき

$z^2+2z+1=0$　$z=-1$

$0\leqq x<2\pi$ であるから $x=\pi$

以上から $x=0$，$\dfrac{\pi}{3}$，π，$\dfrac{5}{3}\pi$……答

((1)を用いたが，解答が長い。一応暗算レベル。)

(3)　(証明) $w=\cos 40^\circ+i\sin 40^\circ$ とおく。半角の公式と(1)の前半により

$$(\text{左辺})=\frac{1}{2}(1-\cos 40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 80^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 120^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos 160^\circ)$$

$$=2-\frac{1}{4}\left\{\left(w+\frac{1}{w}\right)+\left(w^2+\frac{1}{w^2}\right)+\left(w^3+\frac{1}{w^3}\right)+\left(w^4+\frac{1}{w^4}\right)\right\}$$

$$=2-\frac{w^8+w^7+w^6+w^5+w^3+w^2+w+1}{4w^4}$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{4w^4}\sum_{k=1}^{9}w^{k-1}$$

$$=\frac{9}{4}-\frac{1}{4w^4}\cdot\frac{1-w^9}{1-w}$$

$=\dfrac{9}{4}=$(右辺)　($\because\ w^9=1$ より)　終

(最後が突然終了する。暗算レベル。)

センスに富む解答で，九大の先生は歓喜する！しかも暗算レベルで，最後の数式は美しい。(2)，(3)でこの解法を用いた受験生は皆無であったと予測できる。試験会場では時間的に無理か。九大としては，ねらいが活かされなかった。その点では悪問。後期第3問に至っては，重たい計算を課したあとで微妙な数値を検証すると「解なし」問題と判り，これも出題に疑問。

次に，(1)後半を用いた(2)，(3)の解答を。こちらはさらに凝った解法に。

(2)　倍角の公式により

$$1-2\sin^2\frac{x}{2}+1-2\sin^2 x-\left(1-2\sin^2\frac{3}{2}x\right)=1$$

$$\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2 x=\sin^2\frac{3}{2}x$$

$z=\cos\dfrac{x}{2}+i\sin\dfrac{x}{2}$ とおく。(1)の後半により

$$-\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\frac{1}{4}\left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)^2$$

$z-\dfrac{1}{z}=0$ のとき

(1)の後半より，$\sin\dfrac{x}{2}=0$

$0\leqq\dfrac{x}{2}<\pi$ であるから，$\dfrac{x}{2}=0$

よって，$x=0$

$z-\dfrac{1}{z}\neq 0$ のとき

$$1+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2=\left(z^2+1+\frac{1}{z^2}\right)^2$$

$z+\dfrac{1}{z}=t$ とおくと，

$1+t^2=(t^2-1)^2$

$t^4-3t^2=0$

$t=0,\ \pm\sqrt{3}$

(1)の前半により，$\cos\dfrac{x}{2}=0,\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0\leqq\dfrac{x}{2}<\pi$ であるから，$\dfrac{x}{2}=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$

よって，$x=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

以上から，$x=0,\ \dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ ……答

((1)の後半を用いると，2乗するので長くなる。)

(3) (証明) $w=\cos20^\circ+i\sin20^\circ$ とおくと，(1)の後半により

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=-\frac{1}{4}\left(w-\frac{1}{w}\right)^2-\frac{1}{4}\left(w^2-\frac{1}{w^2}\right)^2\\&\quad-\frac{1}{4}\left(w^3-\frac{1}{w^3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(w^4-\frac{1}{w^4}\right)^2\\&=2-\frac{w^{16}+w^{14}+w^{12}+w^{10}+w^6+w^4+w^2+1}{4w^8}\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{4w^8}\sum_{k=1}^{9}(w^2)^{k-1}\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{4w^8}\cdot\frac{1-w^{18}}{1-w^2}\\&=\frac{9}{4}=(\text{右辺})\ (\because\ w^{18}=1\text{ より})\quad\text{終}\end{aligned}$$

(これもセンスに溢れ，暗算レベル。)

オマケ なお，三角形の重心を用いると，ほぼ計算ゼロで簡単に解答できる。

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{1}{2}(1-\cos40^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos80^\circ)\\&\quad+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}(1-\cos160^\circ)\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos40^\circ+\cos80^\circ+\cos160^\circ)\\&=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos40^\circ+\cos280^\circ+\cos160^\circ)\end{aligned}$$

ここで，単位円上の3つの複素数で偏角が 40°，160°，280° のものを考えると，これらは，正三角形の3つの頂点であるから，その重心は原点である。

よって

$$\begin{aligned}(\text{左辺})&=\frac{9}{4}-\frac{1}{2}(\cos40^\circ+\cos280^\circ+\cos160^\circ)\\&=\frac{9}{4}=(\text{右辺})\quad\text{終}\end{aligned}$$

これぞ暗算で容易にできる模範的センス抜群解答。しかし，(1)を用いていない。

5．東北大学前期理系第4問について

一方，東北大学前期の問題は丁寧な誘導が次に繋がっていて，二項定理や複素数の計算をみる標準問題であった。最後は三角関数の数値計算で，これが誘導なしの一発問題であれば，難問に分類されていた。しっかりと別解の一発解答を味わってみよう。

【問題】

多項式 $P(x)$ を

$$P(x)=\frac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$$

により定める。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 a_0，……，a_7 をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}$$

が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1$，2，3について

$x_k=\dfrac{\cos^2k\theta}{\sin^2k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。

【標準的な解答】

(1) $$\begin{aligned}(x+i)^7&=x^7+7x^6i+21x^5i^2+35x^4i^3+35x^3i^4\\&\quad+21x^2i^5+7xi^6+i^7\\&=x^7+7x^6i-21x^5-35x^4i+35x^3\\&\quad+21x^2i-7x-i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-i)^7&=x^7-7x^6i-21x^5+35x^4i+35x^3\\&\quad-21x^2i-7x+i\end{aligned}$$

であるから

$P(x)=7x^6-35x^4+21x^2-1$

よって $a_0=0$，$a_1=7$，$a_2=0$，$a_3=-35$，$a_4=0$，$a_5=21$，$a_6=0$，$a_7=-1$ ……答

(2) (証明) ド・モアブルの定理により

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)&=\frac{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7}{2i}\\&=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7}{2i\sin^7\theta}\\&=\frac{\cos7\theta+i\sin7\theta-(\cos7\theta-i\sin7\theta)}{2i\sin^7\theta}\\&=\frac{\sin7\theta}{\sin^7\theta}\quad\text{終}\end{aligned}$$

(3) (証明) $Q(x)=7x^3-35x^2+21x-1$ であるから，$P(x)=Q(x^2)$ である。

$\theta=\dfrac{\pi}{7}$，$k=1$，2，3に対して $0<k\theta<\pi$ であるから，(2)により

$$Q(x_k)=P\left(\frac{\cos k\theta}{\sin k\theta}\right)=\frac{\sin7k\theta}{\sin^7k\theta}=\frac{\sin k\pi}{\sin^7k\theta}$$
$$=0\quad\text{終}$$

((2)の誘導の効果が大きい)

$0<\theta<2\theta<3\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$x_1>x_2>x_3$ であり，これらは3次方程式 $Q(x)=0$ の異なる3個の実数解である。よって，解と係数の関係により，$x_1+x_2+x_3=5$ ……答

(最後は実にあっけない)

【純粋に三角関数でできる(3)後半のスーパー解答】

$k\theta=\dfrac{k\pi}{7}$ であるから，$7k\theta=k\pi$

よって，$\tan4k\theta=-\tan3k\theta$ ←tan ゆえの事実

ここで，$t=\tan k\theta$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ とおくと

$$\frac{2\cdot\dfrac{2t}{1-t^2}}{1-\left(\dfrac{2t}{1-t^2}\right)^2}=-\frac{t+\dfrac{2t}{1-t^2}}{1-t\cdot\dfrac{2t}{1-t^2}}$$

$$\frac{4t(1-t^2)}{(1-t^2)^2-4t^2}=\frac{t(1-t^2)+2t}{1-t^2-2t^2}$$

$t\neq0$ であるから

$4(1-t^2)(1-3t^2)+(3-t^2)(1-6t^2+t^4)=0$

$4(1-4t^2+3t^4)+3-19t^2+9t^4-t^6=0$

$7-35t^2+21t^4-t^6=0$

(この式から，$\tan^2\dfrac{\pi}{7}+\tan^2\dfrac{2\pi}{7}+\tan^2\dfrac{3\pi}{7}=21$ がわかる。)

$t\neq0$ であるから

$$\frac{7}{t^6}-\frac{35}{t^4}+\frac{21}{t^2}-1=0$$

$0<\theta<2\theta<3\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$x_1>x_2>x_3$ であり，これらは3次方程式 $7x^3-35x^2+21x-1=0$ の異なる3個の実数解である。よって，解と係数の関係により，

$x_1+x_2+x_3=5$ ……答

$\cos\dfrac{\pi}{5}$ の値を倍角，3倍角の公式から求めた経験があれば，自然な発想。これなら，ノーヒントでも解答できる。$k=1$，2，3のすべてに対して $\tan4k\theta=-\tan3k\theta$ が成立するから解答可能。

これに対して，sin や cos では一部の場合には成立しない点がおもしろい。もし，$\tan^2$ の和を問

われていたら，この解法がよい。しかし，最後の展開計算が暗算レベルを超えるのが難点。なお，横浜市立大学医学部医学科前期第４問に，偶然にも同一ネタが出題されていた。問題だけ掲載しておく。この誘導なら，頑張れば暗算レベル。その点，さすがが横市大は昔からセンスがよい。

問題文(1)の送り仮名が昔風になっているのはご愛敬か。

> 【問題】
> 以下の問いに答えよ。
> (1)　ド・モアブルの定理を用いて $\sin 7\theta$ を $\sin\theta$，$\cos\theta$ およびそれらの累乗で表わせ。
> (2)　３次方程式 $7x^3-35x^2+21x-1=0$ を解け。
> (3)　和 $\dfrac{1}{\tan^2\dfrac{\pi}{7}}+\dfrac{1}{\tan^2\dfrac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\tan^2\dfrac{3\pi}{7}}$ を求めよ。

また，横市大第３問には，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$ が出題されており，微分のヒントがついてはいるが，完全に高校の範囲を超越している。試しに本校補習科の前期期末考査に出題してみたが，この定積分は誰一人としてできなかった。本校補習科では，大学１年生に相当することも指導している。さらに，問題文には "Arctan" という記号まで登場して，受験生を惑わせた。実は，この定積分は筆者が大学１年生時演習し，部分分数分解を工夫した思い出がある。

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$$
$$=\int_0^1 \frac{dx}{(x^2-\sqrt{2}\,x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}-\frac{1}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{x}-\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right)dx$$
$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{x}-\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)dx \leftarrow \text{工夫}$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}+\frac{\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}\,x+1}\right)dx$$
$$-\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}-\frac{\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}\,x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\log\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+2\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x+1)+2\tan^{-1}(\sqrt{2}\,x-1)\right]_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\{2\log(\sqrt{2}+1)+\pi\} \quad \cdots\cdots 答$$

分数式の変形が暗算レベルを超えていることがよくわかる。なお，$\dfrac{1}{x}$ という囮を使わなくても分数式の変形は可能。

Focus Gold 数学Ⅲの p.806 も参考にしたい。

$\boxed{\text{オマケ}}$ 次の定積分なら，入試問題標準レベル

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)}$$
$$=\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^2-x+1-(x^2-x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)}dx$$

← 項をうまく補うのがポイント

$$=\frac{1}{3}\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)dx$$
$$=\frac{1}{6}\int_0^1 \left(\frac{2}{x+1}-\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{3}{x^2-x+1}\right)dx$$

← log の準備

ここで，$\displaystyle\int_0^1 \frac{2}{x+1}dx=\Big[2\log(x+1)\Big]_0^1=2\log 2$

$$\int_0^1 \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx=\Big[\log(x^2-x+1)\Big]_0^1=0$$
$$\int_0^1 \frac{3}{x^2-x+1}dx=\int_0^1 \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$

$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan t+\dfrac{1}{2}$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 t}$

$$\int_0^1 \frac{3}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3}{\frac{3}{4}\tan^2 t+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{3}\,dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$$

であるから，$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\log 2+\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$ ……答

これなら，意識の高い補習科生は完解した。

6．東北大学後期理学部第５問について

また，東北大学後期の問題は(1)が誘導になっているが，実は(2)の計算を複雑にするだけの誘導であることがわかる。これもしっかりと味わってみよう。東北大学としては，0点阻止の配慮，弁別度をつけるためなどの理由はあったにしても，せっかくの数学の自由な発想を捨てたのは残念。せめて医学部だけでも，誘導なしの一発問題にすべきであった。

> 【問題】
> z，w を相異なる複素数で z の虚部は正，w の虚部は負とする。このとき，以下の問いに答えよ。
> (1)　1，z，-1，w が複素数平面の同一円周上にあるための必要十分条件は
> $\dfrac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$
> が負の実数となることであることを示せ。
> (2)　$z=x+yi$ が $x<0$ と $y>0$ を満たすとする。
> 1，z，-1，$\dfrac{1+z^2}{2}$ が複素数平面の同一円周上にあるとき，複素数 z の軌跡を求めよ。

【標準的な解答】

(1)　(証明) $0<\arg z<\pi$，$\pi<\arg w<2\pi$ であるから，1，z，-1，w はこの順に円周上に並ぶ。

よって，$\angle(-1)z1+\angle 1w(-1)=\pi$

$$\arg\frac{1-z}{-1-z}+\arg\frac{-1-w}{1-w}=\pi$$
$$\arg\frac{(1-z)(1+w)}{(1+z)(1-w)}=\pi$$

すなわち，$\dfrac{(1+w)(1-z)}{(1-w)(1+z)}$ は負の実数である。

終

(教科書傍用問題集章末問題レベル，頻出)

(2)　$\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$ であるから，$\pi<\arg\dfrac{1+z^2}{2}<2\pi$

よって，(1)により，$\dfrac{\left(1+\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1-z)}{\left(1-\dfrac{1+z^2}{2}\right)(1+z)}$ は負の実数である。

$$\frac{(z^2+3)(z-1)}{(z^2-1)(z+1)}<0 \qquad \frac{(z^2+3)}{(z+1)^2}<0$$

これは，$\dfrac{(z^2+3)}{(z+1)^2}=\overline{\dfrac{z^2+3}{(z+1)^2}}$ ……①　かつ

$$\frac{(z^2+3)}{(z+1)^2}+\overline{\frac{z^2+3}{(z+1)^2}}<0 \quad \cdots\cdots②$$

と同値である。

①は，$(z^2+3)(\bar{z}+1)^2=(z+1)^2(\bar{z}^2+3)$

$$(z^2+3)(\bar{z}^2+2\bar{z}+1)$$
$$=(z^2+2z+1)(\bar{z}^2+3)$$
$$|z|^4+3\bar{z}^2+2z|z|^2+6\bar{z}+z^2+3$$
$$=|z|^4+2|z|^2\bar{z}+\bar{z}^2+3z^2+6z+3$$
$$2|z|^2(z-\bar{z})-2(z^2-\bar{z}^2)-6(z-\bar{z})=0$$

$z-\bar{z}\neq 0$ であるから

$$|z|^2-(z+\bar{z})-3=0 \quad \cdots\cdots③$$
$$z\bar{z}-z-\bar{z}+1=4$$

すなわち，$|z-1|=2$ と同値になる。

②は，$(z^2+3)(\bar{z}+1)^2+(z+1)^2(\bar{z}^2+3)<0$

$$|z|^4+3\bar{z}^2+2z|z|^2+6\bar{z}+z^2+3$$
$$+|z|^4+2|z|^2\bar{z}+\bar{z}^2+3z^2+6z+3<0$$
$$|z|^4+|z|^2(z+\bar{z})+2z^2+2\bar{z}^2+3\bar{z}$$
$$+3z+3<0$$

ここで，$z+\bar{z}=2x$，③により，$|z|^2=2x+3$ であるから，②は

$$(2x+3)^2+2x(2x+3)$$
$$+2\{4x^2-2(2x+3)\}+6x+3<0$$
$$4x^2+12x+9+4x^2+6x$$
$$+8x^2-8x-12+6x+3<0$$
$$16x^2+16x<0$$

すなわち，$-1<x<0$ と同値になる。

これと $x<0$，$y>0$ により，求める軌跡は円の一部 $|z-1|=2\left(\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)$ である。

……答

(1)を用いたが，負である条件の処理が長い。$|z|$ を残す方向でも解答できるが，共に求めた条件が

元の条件に含まれ，完全に無駄になる。東北大学は負である条件に触れなかった答案を，採点上どのように扱ったのであろうか。注意深い受験生が計算にのめり込んで沈没したり，大幅に時間ロスをしていたら大変。無視した受験生がお咎めなしは不公平極まる。そういえば，以前東大の前期入試で，試験開始後に条件の追加を受験室ごとに触れ回って，問題着手順により受験生間に大幅な不公平を招いたことがあり，物議を醸した。是非，東北大学の見解を訊きたい。

【暗算でできる(2)のスーパー解答】

$w=\dfrac{1+z^2}{2}$ とおくと，$\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi$，

$\pi<\arg w<2\pi$ であるから

1，z，-1，w はこの順に円周上に並ぶ。

よって $\angle wz1=\angle w(-1)1$

$$\arg\frac{1-z}{w-z}=\arg\frac{1-(-1)}{w-(-1)}$$

$$\arg\frac{(1-z)\left(\dfrac{1+z^2}{2}+1\right)}{\left(\dfrac{1+z^2}{2}-z\right)}=0$$

$$\arg\frac{(1-z)(z^2+3)}{(z-1)^2}=0$$

すなわち $\dfrac{z^2+3}{z-1}$ が負の実数である。ただし，4点がこの順の並んでいることは保証されているので，負である条件は不要。← これを宣言しておく

よって，$\dfrac{z^2+3}{z-1}=\overline{\dfrac{z^2+3}{z-1}}$ と同値である。

ここで，

$$\frac{z^2+3}{z-1}=\frac{z^2-1+4}{z-1}=z+1+\frac{4}{z-1}$$

←この変形を施しておくと，次が暗算であるから

$$z+1+\frac{4}{z-1}=\bar{z}+1+\frac{4}{\bar{z}-1}$$

$$z-\bar{z}=4\cdot\frac{z-1-(\bar{z}-1)}{(z-1)(\bar{z}-1)}$$

$z-z\neq 0$ であるから，

$(z-1)(\bar{z}-1)=4$

← 約すのと，分母を払う操作を同時に

すなわち，$|z-1|=2$ と同値になる。

これと $x<0$，$y>0$ により，求める軌跡は円の一部 $|z-1|=2\left(\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)$ である。……答

円に内接する四角形の対角の和が π の利用よりも，円周角の定理の逆を利用する方が計算が易しい。(1)がこの方向の誘導であれば良問であった。惜しまれる。この解答なら，実数条件の共役複素数を変形する際に波線部の式変形に気づけば暗算レベル。なお，トレミーの定理の利用も候補に挙げられるが，$|z+1|^2+|z^2+3|=2|z-1|$ から変形が進まないことが容易にわかる。この方法では不可能か。

$\boxed{\text{オマケ}}$ 外接円の中心を用いると，次のように偏角なしで解答できるが，計算は易しくない。

虚軸に関する対称性により，外接円の中心は純虚数 c である。よって $c+\bar{c}=0$ ……①

$|z-c|=|1-c|$ より

$(z-c)(\bar{z}-\bar{c})=(1-c)(1-\bar{c})$

$z\bar{z}-z\bar{c}-c\bar{z}+c\bar{c}=1-c-\bar{c}+c\bar{c}$

①より，$z\bar{z}+zc-c\bar{z}=1-0$ ←見事に消える！

$z-\bar{z}\neq 0$ であるから，$c=\dfrac{z\bar{z}-1}{\bar{z}-z}$，$z$ を $\dfrac{z^2+1}{2}$

にすると，$c=\dfrac{\dfrac{z^2+1}{2}\cdot\overline{\dfrac{z^2+1}{2}}-1}{\overline{\dfrac{z^2+1}{2}}-\dfrac{z^2+1}{2}}$

よって，$\dfrac{z\bar{z}-1}{\bar{z}-z}=\dfrac{\dfrac{z^2+1}{2}\cdot\overline{\dfrac{z^2+1}{2}}-1}{\overline{\dfrac{z^2+1}{2}}-\dfrac{z^2+1}{2}}$

$$\frac{z\bar{z}-1}{\bar{z}-z}=\frac{z^2\bar{z}^2+z^2+\bar{z}^2-3}{2(\bar{z}^2-z^2)}$$

分母を払うと，

$2(z+\bar{z})(z\bar{z}-1)=z^2\bar{z}^2+z^2+\bar{z}^2-3$

$2z^2\bar{z}+2\bar{z}^2z-2z-2\bar{z}=|z|^4+(z+\bar{z})^2-2|z|^2-3$

$|z|^4-2(z+\bar{z}+1)|z|^2+(z+\bar{z}-1)(z+\bar{z}+3)=0$

$\{|z|^2-(z+\bar{z}-1)\}\{|z|^2-(z+\bar{z}+3)\}=0$

← ここの因数分解が厳しい

よって，$|z|^2-(z+\bar{z})+1=0$ または

$|z|^2-(z+\bar{z})=3$

したがって，$|z-1|^2=0$，4

$z\neq 1$ であるから，$|z-1|=2$

これと $x<0$，$y>0$ により，求める軌跡は円の一部 $|z-1|=2\left(\dfrac{\pi}{2}<\arg z<\pi\right)$ である。……答

これは計算が長い。アイディアは自然であるが，因数分解が暗算では無理。純虚数の条件①がきいていることがよくわかる。

7．モデル的問題

【問題】

n を自然数とする。

(1) $n\geqq 2$ とする。$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，点 $\mathrm{P}_k(\alpha^k)(k=0,\ 1,\ \cdots\cdots,\ n-1)$ をとるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\log_n \mathrm{P}_0\mathrm{P}_k$ を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ とする。

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

を求めよ。

(3) p を定数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty}n^p\tan\frac{\pi}{2n+1}\tan\frac{2\pi}{2n+1}\tan\frac{3\pi}{2n+1}\cdots\cdots\tan\frac{n\pi}{2n+1}$$

を求めよ。

【解答】

(1) $z=1$，α，α^2，α^3，……，α^{n-1} は方程式 $z^n=1$ の異なる n 個の解であるから

$z^n-1=(z-1)(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$

と因数分解できる。この左辺は

$z^n-1=(z-1)(z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1)$

と因数分解できるので，恒等式

$(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)\cdots\cdots(z-\alpha^{n-1})$

$=z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots\cdots+z+1$

が得られる。この式に $z=1$ を代入して

$(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\cdots\cdots(1-\alpha^{n-1})=n$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\log_n \mathrm{P}_0\mathrm{P}_k=1$ 答

(図形への応用。一応，$n\geqq 2$ は必要である。)

(2) $k=1$，2，3，……，$n-1$ に対して

$$\begin{aligned}|1-\alpha^k|^2&=(1-\alpha^k)(1-\overline{\alpha^k})\\&=1-(\alpha^k+\overline{\alpha^k})+\alpha^k\overline{\alpha^k}\\&=2-2\cos\frac{2k\pi}{n}\\&=2-2\left(1-2\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)\\&=4\sin^2\frac{k\pi}{n}\end{aligned}$$

$0<\dfrac{k\pi}{n}<\pi$ であるから $|1-\alpha^k|=2\sin\dfrac{k\pi}{n}$

よって，(1)の途中式により

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\sin\frac{3\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

$$=\frac{1}{2}|1-\alpha|\cdot\frac{1}{2}|1-\alpha^2|\cdot\frac{1}{2}|1-\alpha^3|$$

$$\cdots\cdots\cdot\frac{1}{2}|1-\alpha^{n-1}|=\frac{n}{2^{n-1}}$$ 答

(3) 解答を書くにはこの紙面は狭すぎる。(2)と類似した式をつくり tan に直せばよいが，p の値によって場合分けが発生することになる。あとは読者諸賢にお任せいたす。

(1)の計算は 2016 年千葉大に類題がある。図形的な解釈は，啓林館の Focus Gold 数学Ⅲの P.151 に解説が掲載されている。(1)，(2)の計算は北大の過去問に類題がある。

8．生徒への今後の指導について

新課程入試の目玉である複素数平面の問題が出題され続けることは間違いない。しばらくの間は，典型問題をまんべんなく演習し，準備しておけば一応大丈夫であろう。ただし，この分野が理系合否の鍵を握ることも間違いないので，微積分の計算の次に精度の高い完成度にもっていく必要がある。基礎になる三角関数の計算技術の完成も要求される。また，近い将来にはマンネリ化の影響で，図形問題を中心に高度な問題が増加することも予想される。例えば，曲線 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ を原点の周りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転した曲線の方程式を求めるなど，この分野で学習指導要領に触れられていないような出題も十分ありうる。

超難関大学などでは特殊な訓練が要求されることも今後は大いに予想されるので，指導する側が日々研究することが第一に重要であるし，指導者の個人的な力量の差が出る分野であろう。それゆえ，教師冥利に尽きるしやり甲斐もあるというもの。皆さん，お互いに謙虚に切磋琢磨いたしましょう。なお，本論文のスーパー解法は，すべて筆者の休日の遠距離ロードにおける思考の賜物。この永年の涙ぐましい日夜の鍛錬により，暗算能力は格段に進歩することができた。最後になりましたが，読者諸賢のご精読と発表の機会をくださった啓林館さんに感謝します。

E－mail：yamakawa2005jp@yahoo.co.jp

参考文献
〔1〕啓林館フォーカス・ゴールド数学Ⅲ
〔2〕山川宏史膨大なデータベース，休日遠距離ロードにおける珠玉の思考

授業 実践記録

進路目標に対応した数学の指導法 ～難関大学受験に必要な数学的概念～

茨城県立牛久高等学校　佐藤 貴弘

0．はじめに

東大，京大，東工大，一橋大等難関大学の数学の入試問題を解くためには，他の大学の入試には要求されないいくつかの数学の概念が必要だと思われる。そして，それらは教科書や一般の問題集・参考書等では，ほとんど触れられていない。入試において都道府県立の中堅の進学校からトップ校に移動された先生方には，同じような思いを抱かれた方もいらっしゃると思う。それらが，顕著に表れる分野の1つが，図形と方程式の軌跡の分野だと思う。そこでこのたび，軌跡の分野に絞って，難関大学受験に必要な数学的概念について考えていきたいと思う。特に，これからトップ校で数学を教えたいと考えたり，軌跡の指導法について迷っていたり，何か釈然としない思いをしている先生方，軌跡がいまひとつよくわからないという生徒達の参考になれば幸いだと思う。

なお，以下は，平成27年11月に行われた第70回関東都県算数・数学教育研究会栃木大会にて発表したものである。

1．本論

軌跡の分野で，難関大学受験に必要な数学的概念は，大きく分けて次の4つが考えられる。

概念1．軌跡，関数・写像の値域が，存在条件に帰着する（逆手流，逆像法とか呼ばれている）。
概念2．条件の同値変形を理解し，それができる。
概念3．xを固定して，曲線・直線の通過範囲を求める（自然流ファクシミリの原理とか呼ばれている）。
概念4．包絡線を利用して，直線の通過範囲を求める。

概念1，2の理論体系は，次のようになる。

> 定義1　対応と対応の定義域
> 集合Aの各要素に，規則的に，集合Bの要素が対応（一意でなくてよい）するとき，この規則fを，AからBへの対応と呼び，$f:A\to B$と表す。
> また，Aを，対応fの定義域という。

> 定義2　対応の値域
> 対応$f:A\to B$において，$\{f(x)\,|\,x\in A\}$というBの部分集合を，fの値域といい，$f(A)$と表す。
> すなわち，$f(A)=\{f(x)\,|\,x\in A\}$

ここで，対応よりも，高校生にとって馴染み深い，写像も定義しておくが，軌跡の問題を解くとき，直線の通過範囲など，多価的な面があるので，一意対応でない，対応を以下用いていく。

> 定義3　写像
> 定義1，定義2において，『一意的でない』を『一意的である』としたものが，写像の定義となる。

> 定理1　対応の値域と存在条件
> 対応$f:A\to B$において，
> $C=\{y\,|\,y=f(x)$かつ$x\in A$を満たすxが存在する$\}$
> とすると，$f(A)=C$

（証明）
任意の$y_0\in C$とすると，ある$x_0\in A$について，$y_0=f(x_0)$となる。
これは，y_0が，$f(A)$に含まれることを示しいる。
$\therefore\quad C\subset f(A)\quad\cdots\cdots①$
逆に，任意の$y_1\in f(A)$とすると，明らかに，

$y_1=f(x_1)$ かつ $x_1\in A$ を満たす x_1 が存在する。

∴　$f(A)\subset C$　……②

①，②より，$f(A)=C$

> 定義 4　真理集合
> 　x の条件 $P(x)$ を成り立たせるような x 全体の集合を，$P(x)$ の真理集合という。

> 定義 5　条件の同値
> 　条件 $P(x)$ と $Q(x)$ の真理集合が，一致するとき，$P(x)$ と $Q(x)$ は同値であるといい，
> $$P(x)\Longleftrightarrow Q(x)$$
> と表す。

> 定義 6　条件の同値変形
> 　条件 $P(x)$ をそれと同値な条件 $P_1(x)$，$P_2(x)$，$P_3(x)$，$P_4(x)$，…… に，次々と以下のように変形していくことを，条件の同値変形という。
> $$P(x)\Longleftrightarrow P_1(x)\Longleftrightarrow P_2(x)\Longleftrightarrow P_3(x)$$
> $$\Longleftrightarrow P_4(x)\Longleftrightarrow\cdots\cdots$$

問題の中で，集合から集合への**対応関係**を見抜き，このほとんど自明とも思える対応の**値域に関する定理 1** を用い，さらに**条件の同値変形**という条件の変形技術を身につければ，理路整然としており，しかも機械的に，軌跡の問題を解くことが可能になる。

次に，概念 1，2 の下で，すなわち，**軌跡，関数・写像の値域が，存在条件に帰着する**（逆手流，逆像法とか呼ばれている）方法で，特に定理 1 と定義 6 を意識して，具体的問題を解いてみます。

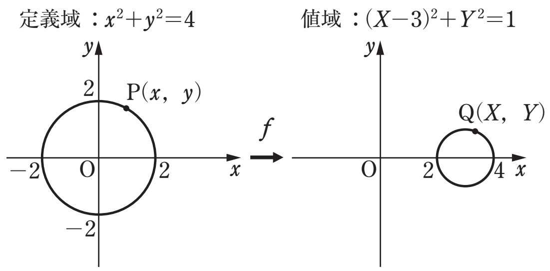
> 【問題 1】
> 　点 P が，円 $x^2+y^2=4$ の周上を動くとき，点 A$(6,\ 0)$ と点 P とを結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

<考察>

P$(x,\ y)$，Q$(X,\ Y)$ とする。

写像 f：点 Q は，線分 AP の中点

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}X=\dfrac{x+6}{2}\\[2mm] Y=\dfrac{y+0}{2}\end{cases}$$



上図のような写像 f の値域を求めればよい。

【解答】〜逆手流〜

P$(x,\ y)$，Q$(X,\ Y)$ とすると，点 Q は，線分 AP の中点であるから，$X=\dfrac{x+6}{2}$，$Y=\dfrac{y+0}{2}$

ゆえに，$\begin{cases}x^2+y^2=4\\ X=\dfrac{x+6}{2}\\ Y=\dfrac{y+0}{2}\end{cases}$　……(A)

を満たす実数 x，y が存在するように X，Y についての条件を求めればよい。

$$(\mathrm{A})\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2=4\\ x=2X-6\\ y=2Y\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(2X-6)^2+(2Y)^2=4\\ x=2X-6\\ y=2Y\end{cases}$$

ゆえに，求める条件は，

$$(2X-6)^2+(2Y)^2=4\Longleftrightarrow(X-3)^2+Y^2=1$$

よって，求める軌跡は，中心 $(3,\ 0)$，半径 1 の円である。

> 【問題 2】
> 　点 $(x,\ y)$ が，領域 $D:\begin{cases}x^2+y^2\leqq 5\\ x+y\geqq -1\end{cases}$ を動くとき，x，y の 2 変数関数 $x-y$ の最大値と最小値を求めよ。

【解答 1】〜逆手流〜

$k=x-y$ とおくと，

$$\begin{cases}x^2+y^2\leqq 5\\ x+y\geqq -1\\ k=x-y\end{cases}\quad\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

を満たす実数 x，y が存在するように，k についての条件を求めればよい。

$$(\mathrm{A})\Longleftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2\leqq 5\\ x+y\geqq -1\\ x=y+k\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}(y+k)^2+y^2\leqq 5\\ (y+k)+y\geqq -1\\ x=y+k\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}2y^2+2ky+k^2-5\leqq 0 & \cdots\cdots①\\ y\geqq\dfrac{-1-k}{2} & \cdots\cdots②\\ x=y+k & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①を満たす実数 y が存在する条件は，y の 2 次方程式 $2y^2+2ky+k^2-5=0$ の（判別式）において，$\dfrac{(\text{判別式})}{4}\geqq 0$　となることである。

$$\frac{(\text{判別式})}{4}\geqq 0\Longleftrightarrow k^2-2(k^2-5)\geqq 0$$

$$\Longleftrightarrow -\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}\quad\cdots\cdots④$$

このとき，

$$①\Longleftrightarrow\frac{-k-\sqrt{10-k^2}}{2}\leqq y\leqq\frac{-k+\sqrt{10-k^2}}{2}$$

となるので，①，②を満たす実数 y が存在する条件は，$\dfrac{-1-k}{2}\leqq\dfrac{-k+\sqrt{10-k^2}}{2}$　……⑤

k を⑤を満たすように決めると，①，②を満たす y も決まり，③により，自動的に x も決まるので，④の下で，⑤が，(A) を満たす実数 x，y が存在するための必要十分な条件となる。

$$⑤\Longleftrightarrow -1\leqq\sqrt{10-k^2}$$

これは，④の下で，常に成り立つ。

ゆえに，求める条件は，結局，

$$④\Longleftrightarrow -\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}$$

になる。

よって，求める最大値は $\sqrt{10}$，最小値は $-\sqrt{10}$ となる。

この解答では，2 変数関数の値域を求めればよいので，条件の同値変形も利用して，式変形的処理をし，連立不等式 (A) を満たす実数 x，y が存在するための必要十分な条件を求めたが，連立不等式が解を持つということは，図形と図形が共有点を持つということと同じなので，図形的な処理も考えられる。いわゆる線形計画法である。

【解答 2】〜逆手流の図形的処理である線形計画法〜

$k=x-y$ とおくと，

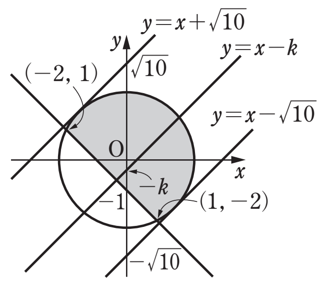
$$\begin{cases}x^2+y^2\leqq 5\\ x+y\geqq -1\\ k=x-y\end{cases}$$

を満たす実数 x，y が存在するように，k についての条件を求めればよい。

すなわち，領域 $D:\begin{cases}x^2+y^2\leqq 5\\ x+y\geqq -1\end{cases}$ と直線 $k=x-y\Longleftrightarrow y=x-k$ が共有点を持つように，k についての条件を求めればよい。

図より，求める条件は，$-\sqrt{10}\leqq k\leqq\sqrt{10}$

よって，求める最大値は $\sqrt{10}$，最小値は $-\sqrt{10}$ となる。



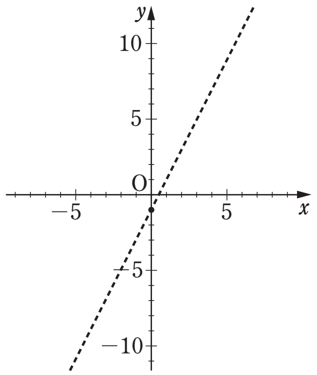
以上が，概念 1，2 の下（逆手流）で軌跡の具体的問題を解いたものですが，すべての問題で，集合から集合への対応関係を見抜き，その値域を求め，それが存在条件に帰着しています。次に，概念 3，すなわち，**x を固定して，曲線・直線の通過範囲を求める**（自然流ファクシミリの原理）方法で，次の問題を考えてみます。

> 【問題 3】
> 　実数 t が，$t\geqq 0$ を満たしながら変化するとき，直線 $y=2tx-t^2$ の通過する範囲を求め，図示せよ。

<考察 1>

中学生の時，点の集まり（点の集合）である直

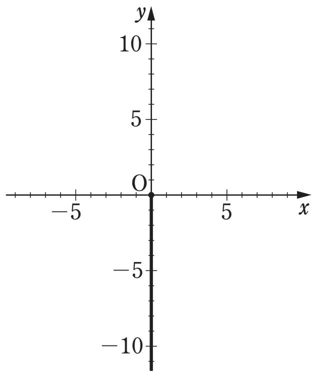
線を描くとき，1つ1つ点をとって，直線全体を描きました。(例えば，$y=2x-1$ に $x=0$ を代入して，$y=2\cdot0-1=-1$ なので，xy 座標平面上に，点 $(0,\ -1)$ をとる。)



この基本的な方法，自然な方法で，与えられた直線群 $y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ の通過範囲を考えていきます。

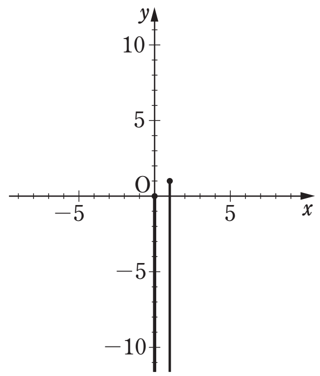
$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ に $x=0$ を代入して，$y=2t\cdot0-t^2=-t^2$ なので，点 $(0,\ -t^2)$ をとる。

このとき，y 座標の値が，$-t^2$ とパラメータ t による表示で，t は，$t\geqq0$ の範囲を動くので，y 座標の値は0以下の数全体である点をすべてを図示する。



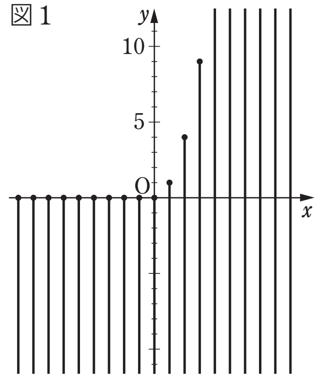
次に，$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ に $x=1$ を代入して，$y=2t\cdot1-t^2=2t-t^2$ なので，点 $(1,\ 2t-t^2)$ をとる。

このとき，y 座標の値が，$2t-t^2=-(t-1)^2+1$ とパラメータ t による表示で，t は，$t\geqq0$ の範囲を動くので，y 座標の値は，1以下の数全体である点をすべてを図示する。



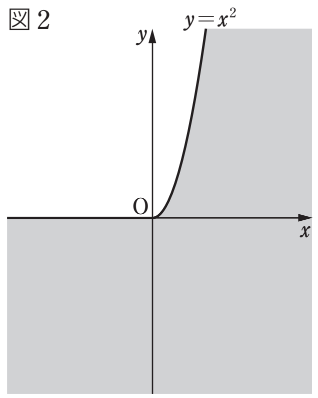
以下，$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ に $x=\cdots\cdots-3,\ -2,\ -1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$ を代入して，同様に図示すると下図のようになる。

図1



そして，$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ にすべての x の値を代入して，同様な処理をすると，
$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ の通過範囲は，下図のようになります。

図2



境界線は含む。

図1から図2のようになるのは，感覚的には理解できますが，飛躍的です。次にもっと厳密に考えます。

<考察2>

<考察1> で

$x=0$ のとき，$y=-t^2\ (t\geqq0)$
となったので，y の値の範囲が，$y\leqq0$

$x=1$ のとき，$y=-(t-1)^2+1\ (t\geqq0)$
となったので，y の値の範囲が，$y\leqq1$

$x=2$ のとき，$y=-(t-2)^2+4\ (t\geqq0)$
となったので，y の値の範囲が，$y\leqq4$

$x=3$ のとき，$y=-(t-3)^2+9\ (t\geqq0)$
となったので，y の値の範囲が，$y\leqq9$

以下，すべての x について，それに対応する y の値の範囲を求め，それらを図示することで通過範囲を求めました。

x の値が決まれば，それに対応して y の値の範囲が決まります。y の値の範囲が決まるということは，y の値の最大値と最小値が決まることと同じです。x の値が決まれば，その x 座標のところでの y 座標の最大値と最小値が決まり，y の値の範囲，すなわち t の2次関数の値域が決まり，通過範囲が決まります。

よって，$y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ の x を定数と考えて，すなわち x を固定して，y を $t\geqq0$ を定義域とする t の2次関数とみたときの値域が，求める通過範囲となります。この考え方を**自然流ファクシミリの原理**と言います。

【解答1】～自然流ファクシミリの原理～

x を固定する。

t の2次関数 $y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ の値域を求めればよい。

$y=f(t)$ とすると，$f(t)=-(t-x)^2+x^2$

$y=f(t)$ のグラフの頂点は，点 $(x,\ x^2)$ で上に凸。

$y=f(t)$ の最大値を M，最小値を m とする。

[1] $x<0$ のとき

$M=f(0)=0$，m は存在しなく，

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\{-(t-x)^2+x^2\}=-\infty$$

よって，値域は，$y\leqq0$

[2] $x\geqq0$ のとき

$M=f(x)=x^2$，m は存在しなく，

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\{-(t-x)^2+x^2\}=-\infty$$

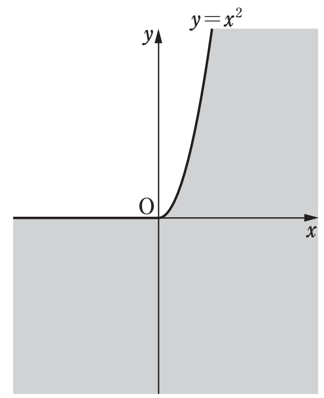
よって，値域は，$y\leqq x^2$

[1]，[2] より，値域は，

$x<0$ のとき，$y\leqq0$

$x\geqq0$ のとき，$y\leqq x^2$

これを図示して，求める通過範囲は，下図のようになる。



境界線は含む。

自然流ファクシミリの原理を利用した解法において，値域を求めるところで，**最大値，最小値の候補に着目**すると，より簡単に，より早く解くことができます。【解答1】より，その候補は，グラフが上に凸な放物線で定義域が半閉区間であるので最小値は存在しませんが，最大値の候補は，定義域の端点の y 座標 $f(0)$ と，極大値の x^2 であることがわかります。ただし，その極大値が候補に入るためには，**定義域内**で極大になる必要があります。すなわち，x が，**$x\geqq0$ のとき**に限ります。そして，それらの候補をすべて図示して，y 座標が最も大きい曲線の式が最大値であり，最小値が存在する場合は，最も小さい曲線の式が最小値となり，それらを選べば，値域が求まります。

【解答2】～最大値，最小値の候補に着目した自然流ファクシミリの原理～

x を固定する。

t の2次関数 $y=2tx-t^2\ (t\geqq0)$ の値域を求めればよい。

$y=f(t)$ とすると，$f(t)=-(t-x)^2+x^2$

$y=f(t)$ のグラフの頂点は，点 $(x,\ x^2)$ で上に凸。

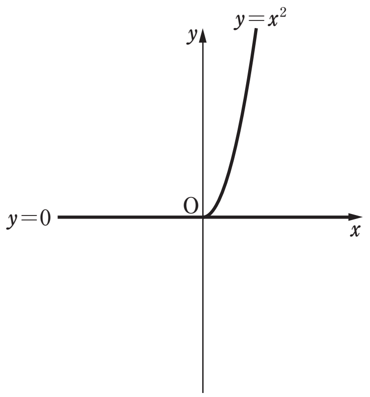
$y=f(t)$ の最小値は，存在しなく，

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{t\to\infty}\{-(t-x)^2+x^2\}=-\infty \quad \cdots\cdots①$$

$y=f(t)$ の最大値の候補は，

$f(0)=0$，x^2（ただし，$x\geqq 0$ のとき）

$y=0$，$y=x^2\ (x\geqq 0)$ を図示すると，下図のようになる。

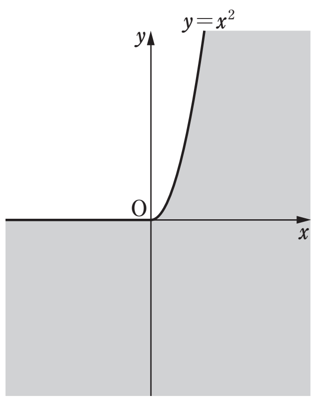


①と図より，求める値域は，

$x<0$ のとき，$y\leqq 0$

$x\geqq 0$ のとき，$y\leqq x^2$

これを図示して，求める通過範囲は，下図のようになる。



境界線は含む。

概念３の下（**自然流ファクシミリの原理**）で，必要に応じて**最大値，最小値の候補に着目**し，直線の通過範囲を求めてきましたが，そのベースにある概念が，中学１年から行ってきた直線を描くとき，１つ１つ通る点の座標を計算して，それを図示して，直線全体を描く手法に帰着するところは，非常に興味深いと思いました。また，自然流ファクシミリの原理で，逆手流同様に，あらゆるパラメータ表示の曲線群の通過範囲を求めることができます。

最後に，概念４，すなわち，包絡線を利用して，直線や線分の通過範囲を考えていきます。包絡線の候補の定理２は，大学の解析学の偏微分法を用いて証明しますが，ここでは省略します。

> 定義７　包絡線
>
> t をパラメータとする微分可能な関数 $f(x,\ y,\ t)=0$ が与えられたとき，
>
> $C_t : f(x,\ y,\ t)=0$
>
> によって，曲線群が定まる。すなわち，t をある値に決めれば（固定すれば），C_t を満たす x，y の関係を表す曲線が１つ定まる。t の値を変えれば，別の曲線が定められるので，C_t は，t をパラメータとする曲線群を示していると考えられる。t を連続的に変えたとき，この曲線 C_t の位置や形は連続的に変わる。ある曲線 C が，各曲線 C_t に接し，しかもその接点の軌跡となっているとき，その曲線 C を，曲線群 C_t の包絡線という。

> 定理２　包絡線の候補
>
> 曲線群 $C_t : f(x,\ y,\ t)=0$ において
>
> $f(x,\ y,\ t)=0$　と　$f_t(x,\ y,\ t)=0$
>
> から，t を消去した x，y の方程式の表す曲線が，曲線群 C_t の**包絡線 C の候補**となる。

（証明）略

包絡線の候補の定理２を用いて，2014 東大理系第６問を解いてみます。この東大の問題は，線分の通過範囲になります。

> 【問題４】　2014 東大理系第６問，線分の通過範囲
>
> 座標平面の原点を O で表す。
>
> 線分 $y=\sqrt{3}\,x\ (0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}\,x\ (-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が６となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。
>
> (1)　s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。
>
> (2)　D を図示せよ。

<解説>

線分の通過範囲の問題ですが，(1)の問題の意味を正確に理解する必要があります。ただ単に線分の通過範囲を求めよと出すと，予備校等で解法を何度も訓練されている受験生に，大して考えることなく，解かれてしまいます。東大は数学的な思考や読解力のある学生がほしいのではないかと思われます。

さて，線分群の，パラメータを α とすると，α は，$1\leqq\alpha\leqq 2$ の範囲を動き，

線分の式は，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2\alpha-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\,\alpha \quad (\alpha-3\leqq x\leqq\alpha)$$

となります。

逆手流で解くと，

$$\begin{cases} 1\leqq\alpha\leqq 2 \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2\alpha-3)x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\,\alpha \\ \alpha-3\leqq x\leqq\alpha \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1\leqq\alpha\leqq 2 & \cdots\cdots① \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2-\left(2\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x\right)\alpha+\sqrt{3}\,x+y=0 & \cdots\cdots② \\ x\leqq\alpha\leqq x+3 & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

となるので，α の２次方程式②が，①，③より，$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3]$ の範囲に，少なくとも１つの解をもつための x，y についての条件を求めることになりちょっと厄介です。自然流ファクシミリの原理の解法の中で求める x を固定した α の２次関数の値域の一部が，小問(1)の答えとなりそうなので，**自然流ファクシミリの原理**で解くのは解法の候補です。ただ，**線分 PQ の通過範囲は，包絡線を利用して直線 PQ の通過範囲を求め，線分の端点である点 P，Q の軌跡を考えていくという方法**もあり，この問題では，点 P，Q の軌跡が明らかなので，包絡線を利用するのを第１の解法とします。

【解答１】～包絡線の利用～

題意より，$\mathrm{P}(\alpha,\ \sqrt{3}\,\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ -\sqrt{3}\,\beta)$ とすると，

$$0\leqq\alpha\leqq 2 \quad \cdots\cdots①$$

$$-2\leqq\beta\leqq 0 \quad \cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned} \mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 &\iff \sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}+\sqrt{\beta^2+3\beta^2}=6 \\ &\iff 2|\alpha|+2|\beta|=6 \\ &\iff |\alpha|+|\beta|=3 \quad \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

直線 PQ：$y-\sqrt{3}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\,\alpha+\sqrt{3}\,\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$

$\cdots\cdots④$

先ずは，α，β が①，②，③を満たしながら変化するときの，④によって定まる直線 PQ の通過範囲を求める。

①かつ②かつ③かつ④

$$\iff \begin{cases} 0\leqq\alpha\leqq 2 \\ -2\leqq\beta\leqq 0 \\ \alpha-\beta=3 \\ y-\sqrt{3}\,\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\,\alpha+\sqrt{3}\,\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=\alpha-3 & \cdots\cdots⑥ \\ 1\leqq\alpha\leqq 2 & \cdots\cdots⑦ \\ y=\dfrac{\sqrt{3}\,(2\alpha-3)}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\,\alpha & \cdots\cdots⑧ \end{cases}$$

ゆえに，α が⑦を満たしながら変化するときの，⑧によって定まる直線 PQ の通過範囲を求める。

⑧の両辺を α について微分すると，

$$0=\frac{2\sqrt{3}}{3}x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\alpha+2\sqrt{3}$$

$$\iff \alpha=\frac{x+3}{2} \quad \cdots\cdots⑨$$

⑨を⑧に代入して，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{2\left(\frac{x+3}{2}\right)-3\right\}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\frac{x+3}{2}\right)^2+2\sqrt{3}\left(\frac{x+3}{2}\right)$$

$$\iff y=\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad\cdots\cdots⑩$$

ゆえに，⑧の包絡線が存在すれば，それは⑩である。(∵定理2より)

⑧，⑩から y を消去すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2\alpha-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\alpha$$

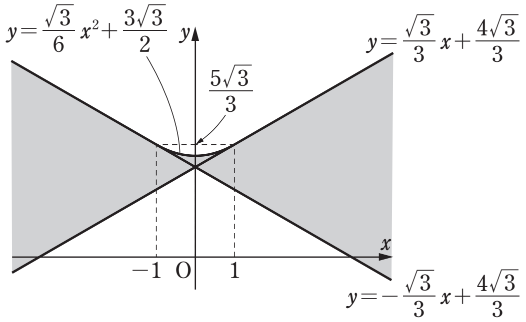
$$\iff \{x-(2\alpha-3)\}^2=0$$

ゆえに，直線PQは，放物線⑩に，点 $\left(2\alpha-3,\ \frac{\sqrt{3}}{6}(2\alpha-3)^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ で接する。

⑦より $-1\leqq 2\alpha-3\leqq 1$

ゆえに，直線PQは，放物線⑩上の x 座標が，$-1\leqq x\leqq 1$ である点で，接しながら動く。

ゆえに，直線PQの通過範囲は，下図のようになる。



一方，⑦より，α が $1\leqq\alpha\leqq2$ の範囲を動き，$\mathrm{P}(\alpha,\ \sqrt{3}\alpha)$ より，点Pの軌跡は，

線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq 2)$

また，⑥より，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ -\sqrt{3}\beta)$ は，

点 $\mathrm{Q}(\alpha-3,\ -\sqrt{3}(\alpha-3))$ より，点Qの軌跡は，

線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq -1)$

$\alpha-3$ は，α が，1から2まで動くとき，同じ速さで，−2から−1まで変化するので，

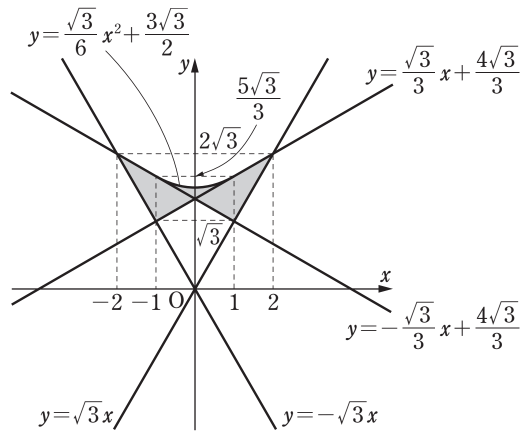
線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq 2)$ と

線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq -1)$ の対称性も考えて，

点Pは，線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq 2)$ 上を，点 $(1,\ \sqrt{3})$ から点 $(2,\ 2\sqrt{3})$ まで，

点Qは，線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq -1)$ 上を，点 $(-2,\ 2\sqrt{3})$ から点 $(-1,\ \sqrt{3})$ まで同じ速さで動く。

以上より，線分PQの通過範囲 D は，下図のようになる。境界線は含む。



この図より，求める t の範囲は，

$0\leqq s\leqq 1$　のとき

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$1<s\leqq 2$　のとき

$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

【解答2】～最大値，最小値の候補に着目した自然流ファクシミリの原理～

題意より，$\mathrm{P}(\alpha,\ \sqrt{3}\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ -\sqrt{3}\beta)$ とすると，

$0\leqq\alpha\leqq2$ ……①

$-2\leqq\beta\leqq0$ ……②

$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6\iff\sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}+\sqrt{\beta^2+3\beta^2}=6$

$\iff 2|\alpha|+2|\beta|=6$

$\iff |\alpha|+|\beta|=3$ ……③

直線PQ：$y-\sqrt{3}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$ ……④

先ずは，α，β が①，②，③を満たしながら変化するときの，④によって定まる直線PQの通過範囲を求める。

①かつ②かつ③かつ④

$$\iff\begin{cases}0\leqq\alpha\leqq2\\-2\leqq\beta\leqq0\\\alpha-\beta=3\\y-\sqrt{3}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha)\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}\beta=\alpha-3 & \cdots\cdots⑥\\1\leqq\alpha\leqq2 & \cdots\cdots⑦\\y=\dfrac{\sqrt{3}(2\alpha-3)}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\alpha & \cdots\cdots⑧\end{cases}$$

ゆえに，α が⑦を満たしながら変化するときの，⑧によって定まる直線PQの通過範囲を求める。

x を固定する。

⑦を定義域とする α の2次関数⑧の値域を求めればよい。

$y=f(\alpha)$ とすると

$$⑧\iff y=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\alpha-\frac{x+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

より，α の2次関数

$$f(\alpha)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\alpha-\frac{x+3}{2}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad(1\leqq\alpha\leqq2)$$

の値域を求めればよい。

$y=f(\alpha)$ のグラフの頂点は，

点 $\left(\dfrac{x+3}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ で上に凸。

ゆえに，$y=f(\alpha)$ の最大値，最小値の候補は，

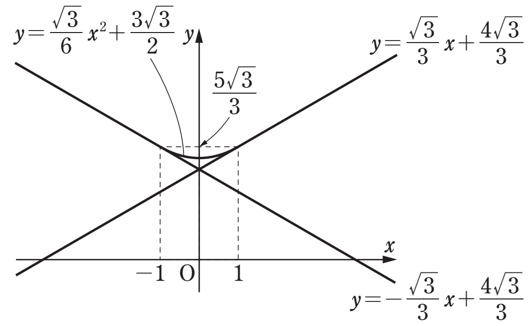
$f(1)=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$f(2)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $\left(ただし，1\leqq\dfrac{x+3}{2}\leqq2\iff -1\leqq x\leqq1のとき\right)$

$y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$y=\dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ $(-1\leqq x\leqq1)$ を図示すると，

下図のようになる。



よって，α の2次関数

$$f(\alpha)=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(\alpha-\frac{x+3}{3}\right)^2+\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$(1\leqq\alpha\leqq2)$ の値域は

$x<-1$　のとき

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$-1\leqq x\leqq0$　のとき

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

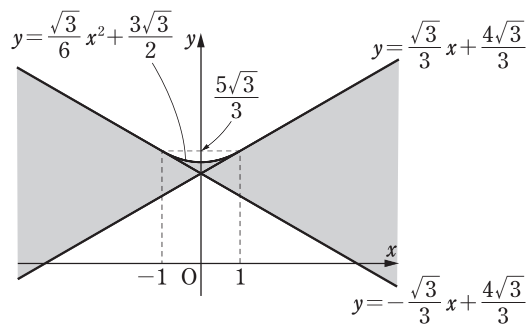
$0\leqq x\leqq1$　のとき

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$1<x$　のとき

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq y\leqq\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

これを図示して，直線PQの通過範囲は，下図のようになる。



一方，⑦より，α が，$1\leqq\alpha\leqq2$ の範囲を動き，

$\mathrm{P}(\alpha,\ \sqrt{3}\alpha)$ より，点Pの軌跡は，

線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq2)$

また，⑥より，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ -\sqrt{3}\beta)$ は，

点 $\mathrm{Q}(\alpha-3,\ -\sqrt{3}(\alpha-3))$ より，点Qの軌跡は，

線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq-1)$

$\alpha-3$ は，α が，1から2まで動くとき，同じ速さで，-2 から -1 まで変化するので，

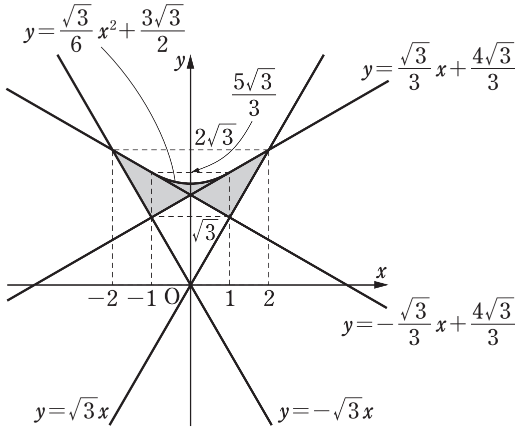
線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq 2)$ と

線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq -1)$ の対称性も考えて，

点Pは，線分：$y=\sqrt{3}x\ (1\leqq x\leqq 2)$ 上を，点 $(1,\ \sqrt{3})$ から点 $(2,\ 2\sqrt{3})$ まで，

点Qは，線分：$y=-\sqrt{3}x\ (-2\leqq x\leqq -1)$ 上を，点 $(-2,\ 2\sqrt{3})$ から点 $(-1,\ \sqrt{3})$ まで同じ速さで動く。

以上より，線分PQの通過範囲 D は，下図のようになる。境界線は含む。



この図より，求める t の範囲は，

$0\leqq s\leqq 1$　のとき

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$1<s\leqq 2$　のとき

$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

最後に，＜解説＞の部分で触れた‘ちょっと厄介’な方法と述べた，**線分の通過範囲**を，**逆手流**で解いてみます。発展途上の生徒にはやらせるべきで，そして，**最大値，最小値の候補に着目した自然流ファクシミリの原理**と**包絡線の利用**の利点を実感させます。

【解答3】～逆手流で，線分の通過範囲を求める～

題意より，$P(\alpha,\ \sqrt{3}\alpha)$，$Q(\beta,\ -\sqrt{3}\beta)$ とすると，

$0\leqq\alpha\leqq 2$ ……(1)

$-2\leqq\beta\leqq 0$ ……(2)

$$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6 \iff \sqrt{\alpha^2+3\alpha^2}+\sqrt{\beta^2+3\beta^2}=6$$
$$\iff 2|\alpha|+2|\beta|=6$$
$$\iff |\alpha|+|\beta|=3 \quad \cdots\cdots(3)$$

直線PQ：$y-\sqrt{3}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$ より，

線分PQ：$y-\sqrt{3}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha)$

$(\beta\leqq x\leqq\alpha)$ ……(4)

α，β が(1)，(2)，(3)を満たしながら変化するときの，(4)によって定まる線分PQの通過範囲を求める。

(1)かつ(2)かつ(3)かつ(4)

$$\iff \begin{cases} 0\leqq\alpha\leqq 2 \\ -2\leqq\beta\leqq 0 \\ \alpha-\beta=3 \\ y-\sqrt{3}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}\alpha+\sqrt{3}\beta}{\alpha-\beta}(x-\alpha) \quad (\beta\leqq x\leqq\alpha) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \beta=\alpha-3 & \cdots\cdots(6) \\ 1\leqq\alpha\leqq 2 & \cdots\cdots(7) \\ y=\dfrac{\sqrt{3}(2\alpha-3)}{3}x-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2+2\sqrt{3}\alpha & \\ \qquad (\alpha-3\leqq x\leqq\alpha) & \cdots(8) \end{cases}$$

(6)，(7)，(8)を満たす α，β が存在するように x，y の条件を求めるわけだが，(7)，(8)を満たす α が存在するように x，y を決めると，(7)，(8)を満たす α が決まり，(6)により，自動的に β も決まる。

ゆえに，

(7)かつ(8)

$$\iff \begin{cases} 1\leqq\alpha\leqq 2 & \cdots\cdots(9) \\ \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\alpha^2-\left(2\sqrt{3}+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x\right)\alpha+\sqrt{3}x+y=0 & \cdots(10) \\ x\leqq\alpha\leqq x+3 & \cdots\cdots(11) \end{cases}$$

を満たす α が存在するように x，y の条件を求めればよい。

すなわち，α の2次方程式(10)が，(9)，(11)より，$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3]$ の範囲に，少なくとも1つの解をもつための x，y についての条件を求めればよい。

$x+3<1$ または $2<x \iff x<-2$ または $2<x$ のときは，$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3]$ は，空集合となり，不適。

ゆえに，$-2\leqq x\leqq 2$ であることが必要である。以下，この条件下で考える。

$[1,\ 2]$ の区間の幅1，$[x,\ x+3]$ の区間の幅3も考えると，

$x+3\leqq 2 \iff x\leqq -1 \iff -2\leqq x\leqq -1$ のときは，$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3] \iff [1,\ x+3]$

$\begin{cases} x<1 \\ 2<x+3 \end{cases} \iff -1<x<1$ のときは，

$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3] \iff [1,\ 2]$

$1\leqq x \iff 1\leqq x\leqq 2$ のときは，

$[1,\ 2]$ かつ $[x,\ x+3] \iff [x,\ 2]$

一方，

$$(10) \iff 4\left(\alpha-\frac{x+3}{2}\right)^2-x^2-9+2\sqrt{3}y=0 \quad \cdots(12)$$

ゆえに，$f(\alpha)=4\left(\alpha-\dfrac{x+3}{2}\right)^2-x^2-9+2\sqrt{3}y$

とおくと，

α の2次関数 $f(\alpha)$ のグラフの頂点は，

点 $\left(\dfrac{x+3}{2},\ -x^2-9+2\sqrt{3}y\right)$，下に凸

[1] $-2\leqq x\leqq -1$ のとき

2次方程式(12)が，$[1,\ x+3]$ の範囲に，少なくとも1つの解をもつための x，y についての条件を求めればよい。

このとき，$\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{x+3}{2}\leqq 1$ となり，2次関数 $f(\alpha)$ は，区間 $[1,\ x+3]$ で，単調に増加する。

ゆえに，求める条件は，

$$\begin{cases} f(1)\leqq 0 \\ f(x+3)\geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y\leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \\ y\geqq -\sqrt{3}x \end{cases}$$

$$\iff -\sqrt{3}x\leqq y\leqq -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

[2] $-1<x<1$ のとき同様に考える。

[3] $1\leqq x\leqq 2$ のとき同様に考える。

[1]，[2]，[3]より，求める条件は，

$-2\leqq x\leqq -1$ のとき

$$-\sqrt{3}x\leqq y\leqq -\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

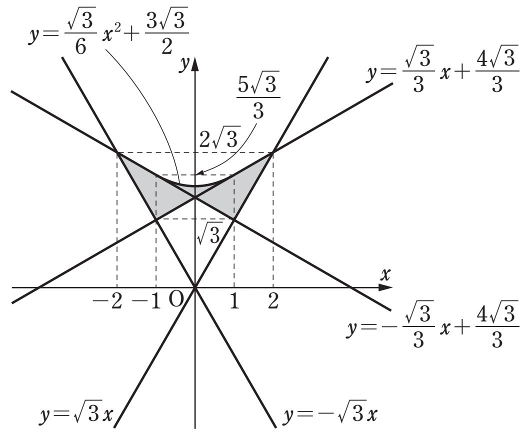
$-1<x<1$ のとき

$$\begin{cases} y\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}x^2+\dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ y\geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \ \text{または}\ y\geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}x+\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\sqrt{3}x\leqq y\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

これを図示すると，線分PQの通過範囲 D は，下図のようになる。境界線は含む。



この図より，求める t の範囲は，

$0\leqq s\leqq 1$ のとき

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{6}s^2+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$1<s\leqq 2$ のとき

$$\sqrt{3}s\leqq t\leqq \frac{\sqrt{3}}{3}s+\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

＜考察＞

解答1は，先ずは直線PQの通過範囲を考えて，それを包絡線を利用して求め，さらに，線分の端点P，Qの軌跡と動きを考えて，線分PQの通過範囲を求めています。　→包絡線を利用

解答2と，東京出版『大学への数学，2015　8月号』は，先ずは直線PQの通過範囲を考えて，それを x を固定して，α の2次関数の値域を，最大値，最小値の候補を使って求め，さらに，線分の端点P，Qの軌跡と動きを考えて，線分PQの通

過範囲を求めています。
→最大値，最小値の候補に着目した自然流ファクシミリの原理

解答 3 は，直線 PQ の通過範囲は考えず，線分 PQ 通過範囲を，α の存在条件を明記して，その存在条件を，線分 PQ の式が α の 2 次式方程式なので，無意識的に x，y を固定して，α の 2 次関数のグラフを利用して α の 2 次式方程式の解の存在条件に帰着させて，求めています。→逆手流

どれが 1 番よいかの優劣はつけるつもりはありませんが，最短の解答を目指していくとよいのでしょう。また，生徒に指導していく上での注意点の 1 つに，細かい場合分けをし，2 次関数のグラフを利用して，2 次方程式の少なくとも 1 つの解の存在条件を求めることに帰着する逆手流と，同じく，細かい場合分けをし考えていく，パラメータの入った 2 次関数の最大，最小についての問題を，十分に時間をかけ練習させることです。前述したようにとても大事で身に着けなくてはならない概念ですが，最大値，最小値の候補で考えていったり，自然流ファクシミリの原理や包絡線の利用の解法は速くて便利ですが，楽することもでき，そればかりに頼ろうとすると，細かい場合分けなどが十分にできなくなる可能性があります。苦あれば楽で，その逆もあるわけです。先ずは，生徒には，逆手流でいろいろな軌跡の問題を解きまくらせるといいと思います。ということで，今回は私は逆手流でも解いたわけです。

2．終わりに

以上のように，理論構築し，個々の問題を解くトレーニングを行うことで，軌跡が苦手だ，あるいは，問題は解けるが今一つ何をやっているのかはっきりしない，という生徒に対して，明確な理解の 1 つの突破口になるのではないかと思う。また，東大，京大，東工大，一橋大等難関大学受験生のための軌跡の指導法の 1 つであり，実際に具体的問題を処理するときは，自然流ファクシミリの原理が主に利用されるであろうが，これら論理体系を一点の曇りなく理解していく過程での数学的知的思考経験によって，難関大受験生としての数学的基盤がより強固になるであろう。ただ，このような概念を指導することは．難関大を受験する生徒にとっては，受験でも必要だし進学後も有益に働くかもしれない。

しかし，都道府県立のトップ校においても，それらの大学を目指す生徒の割合は，多くても半数に満たないであろう。

残り半数以上の生徒にとっては，理解に相当時間がかかる上，そこまで要求されていないという問題がある。現実的な指導との兼ね合いがポイントとなるであろう。

3．参考文献

「2006 年 10 月号　大学への数学　東京出版」
「大学への数学Ⅰ　1980 年　研文書院」
以上，逆手流

「2008 年 5 月号　大学への数学　東京出版」
「2015 年 8 月号　大学への数学　東京出版」
以上，自然流ファクシミリの原理

「2008 年 6 月号　大学への数学　東京出版」
「応用解析の基礎 1 微分積分（上）　入江昭二，垣田高夫，杉山昌平，宮寺功（共著）　内田老鶴圃新社」
「1983 年　解析概論 改訂第 3 版（1983 年）高木貞治（著）　岩波書店」
以上，包絡線

佐藤 貴弘　さとう たかひろ

青森県生まれ。
早稲田大学教育学部理学科数学専攻卒業，その後，茨城県立土浦第一高等学校，水戸第一高等学校など，茨城県立の高等学校に勤務し，現在は，茨城県立牛久高等学校に勤務。水戸一高勤務時に，難関大学志望者を中心とする数学研究会を立ち上げる。
平成24～28年　関東都県算数・数学教育研究会にて，下記の内容を発表
『高校ベクトルの本質とその指導　ーベクトル方程式ー 』（松本大会）
『斜交座標・位置ベクトル・成分の本質的な指導法　ーベクトルの苦手意識をなくすためにー 』（山梨大会）
『背理法・対偶法・全称命題・存在命題等を明確に理解するためにー 』（茨城大会）
『進路目標に対応した数学の指導法　ー難関大学受験に必要な数学的概念ー 』（栃木大会）
『数Ⅲから解析学へ　ー小数のＮ進表示から自然に解析学に踏み込むー 』（静岡大会）

授業
実践記録

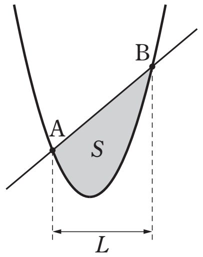
面積公式からの拡張 ～トヨシマの定理?～

香川県立観音寺第一高等学校　豊嶋 弘文

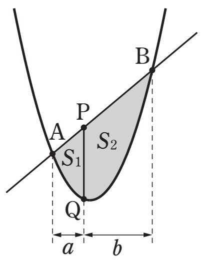
入試問題を解いていて，こんな法則を発見しました。受験などでも活用できそうだと感じましたので，発表することにいたしました。

直線と放物線で囲まれた図形の面積についての以下の公式はよく知られています。

$$S=\frac{1}{6}\left|x^2\text{の係数}\right|L^3$$



これを放物線の軸と平行な直線で分割してみます。



このような図形 S_1 や S_2 などの面積やその面積比についての問題は，定積分の典型的なパターンとして入試問題などでもよく見かけます。ただ，計算が面倒で閉口することもありますよね。

はい，トヨシマの定理の出番です。

先の公式で $L=a+b$ として展開してみます。

あ，そうそう，(x^2 の係数)$=p$ としておきますね。

$$\frac{|p|}{6}(a+b)^3=\frac{|p|}{6}(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)$$

すると，S_1 と S_2 は展開式の前半と後半の

$$S_1=\frac{|p|}{6}(a^3+3a^2b),\quad S_2=\frac{|p|}{6}(3ab^2+b^3)$$

になっています。

面積比を求めたいなら，定数倍は不要ですから，もっと簡単です。

① まず3乗の展開公式を書きます。

② 次に2項目と3項目の間に区切るための線をいれます。

③ あら不思議，面積比の出来上がりです。

$$(a+b)^3=(a^3+3a^2b\ \vdots\ +3ab^2+b^3)$$
$$\boldsymbol{S_1 : S_2}$$

例えば $a:b=1:2$ なら

$$S_1:S_2=(1^3+3\cdot1^2\cdot2):(3\cdot1\cdot2^2+2^3)=7:20$$

(拍手！)

さて，種明かしをいたしましょう。

積分計算によって確かめることもできますが，ここでは図形的に確かめてみたいと思います。

その前に，次のことを確かめておきます。

$$\mathrm{PQ}=\left|x^2\text{の係数}\right|\times ab$$

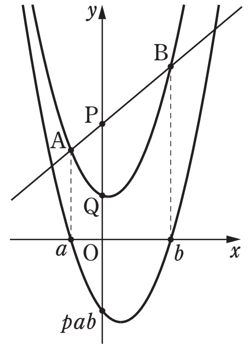
x 軸と $(a,\ 0)$，$(b,\ 0)$ で交わる放物線は，(x^2 の係数)$=p$ として

$$y=p(x-a)(x-b)$$

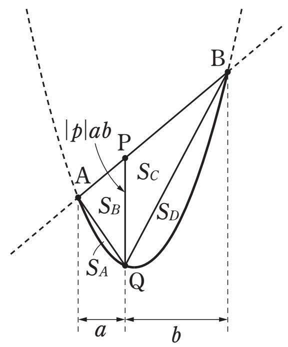
で表されますから，展開すると

$$y=px^2-p(a+b)x+pab$$

したがって y 軸との交点が $(0,\ pab)$ であることがわかります。あとは適当な一次式を加え，任意の位置に平行移動すると，補題の関係が得られます。(次図)



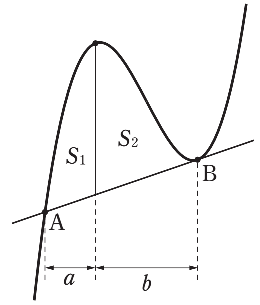
次に，点Aと点Q，点Bと点Qを結び，それぞれの面積 S_1，S_2 から三角形を切り出し，いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式と組み合わせると面積 S_1，S_2 を求めることができます。



$$S_1=S_A+S_B=\frac{|p|}{6}a^3+\frac{1}{2}|p|ab\cdot a$$
$$=\frac{|p|}{6}(a^3+3a^2b)$$
$$S_2=S_C+S_D=\frac{1}{2}|p|ab\cdot b+\frac{|p|}{6}b^3$$
$$=\frac{|p|}{6}(3ab^2+b^3)$$

「ひょっとしたら，もっともっと深い理論があるかもしれない」なんて思うほどに美しい結果だと思うのですが，みなさんはどう思われますか？

さらに3次，4次関数にも同様の性質があります。3次関数の場合は



$$S_1+S_2=\frac{1}{12}\left|x^3\text{の係数}\right|(a+b)^4$$

ですよね。そこで，

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

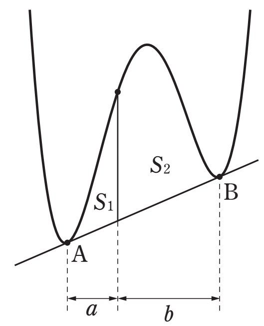
を利用します。項が奇数個なので半分ずつというわけにはいきません。どこで区切りましょうか？

どうやら接点(2重解)の方に寄って区切るとうまくいきそうです。図の場合の区切り線は $6a^2b^2$ と $4ab^3$ の間，です。

$$S_1:S_2=(a^4+4a^3b+6a^2b^2):(4ab^3+b^4)$$

※実面積は $\frac{1}{12}\left|x^3\text{の係数}\right|$ を掛けます。

次は4次関数です。



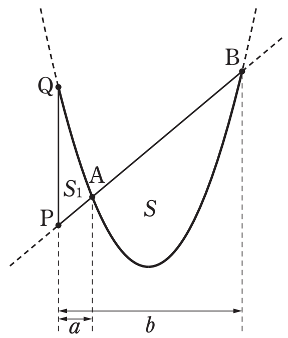
もうお分かりですね。

$$S_1 : S_2=(a^5+5a^4b+10a^3b^2) : (10a^2b^3+5ab^4+b^5)$$

※実面積は $\dfrac{1}{30}\,|\,x^4$ の係数 $|$ を掛けます。

　ところで，点 P が線分 AB の外，つまり外分しているときはどうなるのでしょう。2 次関数について考察しておきます。

　点 P が線分 AB を $a:b\ (a<b)$ に外分する場合



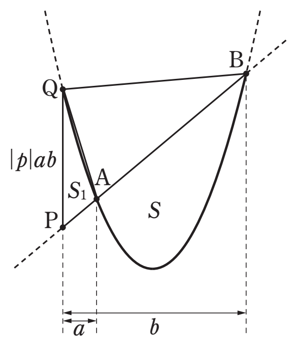
　放物線と直線で囲まれた図形の面積 S について

$$S=\frac{|p|}{6}(-a+b)^3=\frac{|p|}{6}(-a^3+3a^2b-3ab^2+b^3)$$

ですが，展開式の前半部分について

$$S_1=\frac{|p|}{6}(-a^3+3a^2b)$$

であることは下図から確かめることができます。



　こうなると気になるのが S_2 ということになりますが，展開式の後半部分

$$S_2=\frac{|p|}{6}(-3ab^2+b^3)$$

とすると，$S=S_1+S_2$ ですので，$S_2=S-S_1$ となり，面積の差というよりほかなく，図形的に「この部分です」と明示できそうにありません。したがって私には展開式を区切った形式的な比に意味をもたせることはできませんでした。

　ただ，S_1 を求める面積計算に利用することはできそうです。

　なお，$a>b$ の場合は $S=\dfrac{|p|}{6}(a-b)^3$ の展開式の後半部分を使えばよいでしょう。

　さて，いかがだったでしょうか？

　ふざけて『トヨシマの定理』なんて書いてしまいましたので，「そんなことは昔から知っているよ。」なんて言われると赤面ものです。また，事実のみを取り出して記述した内容ですので，背景に対する考察が不足しているかもしれません。ぜひご意見をお聞かせください。よろしくお願いします。

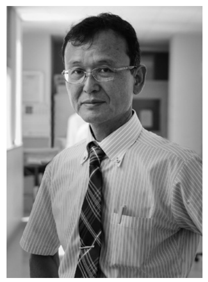
　これを授業で扱うことはほとんどありませんが，問題演習などで解法を紹介することもあります。最後に「これを『トヨシマの定理』という。」なんて宣言すると，「おお～」と驚きなのか困惑なのか，はたまた意味なのかって感じの反応があります。もちろん気にしないようにしています。(笑)

謝辞

　私の単純な思いつきから悪ふざけで書き始めた原稿でしたが，香川県高等学校数学研究部会の会誌編集委員の諸先生方には拙稿を熱心にご覧いただき，貴重なご意見をいただきました。ありがとうございました。

　また，私の些細な発見を全国の皆さまに見ていただく機会をいただいた啓林館の皆さまにも心より感謝申し上げます。

豊嶋 弘文　とよしま ひろふみ



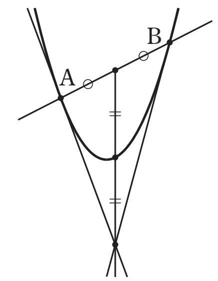
香川県三豊市高瀬町生まれ
2000年4月～2002年3月 第18期19期マレイシア政府派遣留学生予備教育派遣教員
2011～2012年 高校写真部による震災復興応援プロジェクト
2004年，2008年，2011年，2012年，2014年，2016年写真甲子園出場

1985年より数学科教諭として香川県立高等学校に勤務，観音寺中央高校，坂出高校などを経て2015年よりSSH校(スーパーサイエンスハイスクール校)でもある香川県立観音寺第一高等学校で教壇に立っている。初めてのＳＳＨ校勤務でもあり，課題研究の指導やアクティブラーニングを取り入れた授業の模索など，新たな挑戦に四苦八苦の毎日である。
マレイシアでの勤務や写真部顧問として写真甲子園などの全国大会に出場したことで，全国で奮闘する先生方とのつながりができ，親しくさせていただいている。あと数年の教員生活であるが，このつながりこそが何物にも代えがたい私の財産であると感じている。

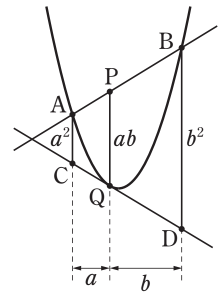
役に立つ（かもしれない）放物線の性質（まとめ）

【注意】面積計算は**係数を掛ける**ことを忘れない！

◆線分の長さ



2 点 A，B における接線について

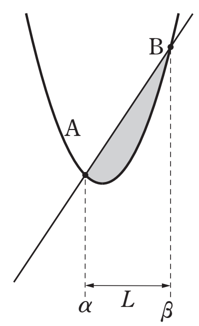


放物線と 2 点で交わる直線と接線

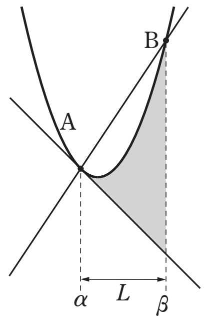
AC：PQ：BD$=a^2:ab:b^2$

長さは｜x^2 の係数｜を掛ける

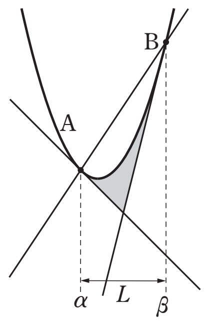
◆ 面積



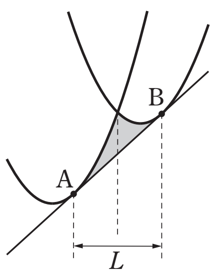
$$S=\frac{1}{6}\,|\,x^2\text{ の係数}\,|\cdot L^3$$



$$S=\frac{1}{3}\,|\,x^2\text{の係数}\,|\cdot L^3$$

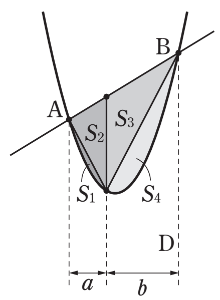


$$S=\frac{1}{12}\,|\,x^2\text{の係数}\,|\cdot L^3$$



$$S=\frac{1}{12}\,|\,x^2\text{の係数}\,|\cdot L^3$$

◆面積その2



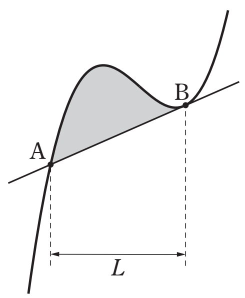
$$S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = a^3 : 3a^2b : 3ab^2 : b^3$$

実面積がほしいときは，$\frac{1}{6}\,|\,x^2$ の係数$\,|$ を掛ければよい。

$(S_1,\ S_2,\ S_3,\ S_4)=$

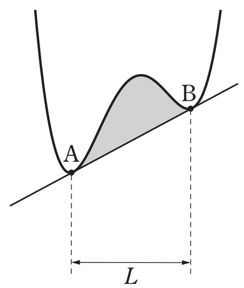
$\frac{1}{6}\,|\,x^2$ の係数$\,|\,(a^3,\ 3a^2b,\ 3ab^2,\ b^3)$

◆ (おまけ) 似たような公式



3次関数の接線

$$S=\frac{1}{12}\,|\,x^3\text{の係数}\,|\cdot L^4$$



4次関数の接線

$$S=\frac{1}{30}\,|\,x^4\text{の係数}\,|\cdot L^5$$

題材研究記録

ガモフの宝探し問題の拡張と一般化

秋田市立秋田商業高等学校　野呂 耕一郎

1 「ガモフの宝探し問題」とは

ガモフの宝探し問題は理論物理学者であるジョージ・ガモフによって考えられた。ジョージ・ガモフはビッグバン理論の創始者である。この問題は啓林館の教科書「数学活用」にも「パソコンで学ぶ幾何学」というタイトルで掲載されている。ガモフの宝探し問題とは次のような問題である。

> ある島に井戸と松の木1本と梅の木1本がある。海賊が宝を次のように埋めたという古文書が見つかった。
>
> 「井戸から松の木へ線を引け。そこで90度右に曲がり同じ長さだけ進み，そこへ杭を打て。井戸から梅の木へ線を引け。そこで90度左に曲がり同じ長さだけ進み，そこへ杭を打て。2本の杭の真ん中に宝は隠されている。」
>
> (ガモフ「1，2，3，∞」より)
>
> ある探検家が島に行ってみると，松の木と梅の木はあったが，井戸は埋まっていて見つからない。しかし，探検家は見事に宝を発見することができた。どうやって宝をみつけたのか。

平面幾何を使う解法，三角関数を使う解法，ベクトルを使う解法等いろいろな解法があるが，複素数平面を使う解法があり，この解法が最もシンプルな解法であると思われる。実はガモフはこの問題を通して複素数の有用性を感じてほしいというねらいがあったという。過去には入試問題として自治医大で出題されたこともあるようである。

複素数平面を使う解法は次の通りである。

> 井戸 α から進み，松の木 z で90度右に曲がり同じ長さだけ進むと杭の位置 z' は
>
> $z'=(\alpha-z)i+z$
>
> 梅の木 w で90度左に曲がり同じ長さだけ進むと，杭の位置 w' は
>
> $w'=(\alpha-w)(-i)+w$
>
> よってこれらの中点 T は
>
> $$T=\frac{z'+w'}{2}=\frac{(\alpha-z)i+z+(\alpha-w)(-i)+w}{2}=\frac{-zi+z+wi+w}{2}=\left(w-\frac{z+w}{2}\right)i+\frac{z+w}{2}$$
>
> となり，T は w を z と w の中点のまわりに90度だけ回転した点になる。すなわち，線分 zw を斜辺とする直角二等辺三角形のもうひとつの頂点が T であり，そこに宝がある。

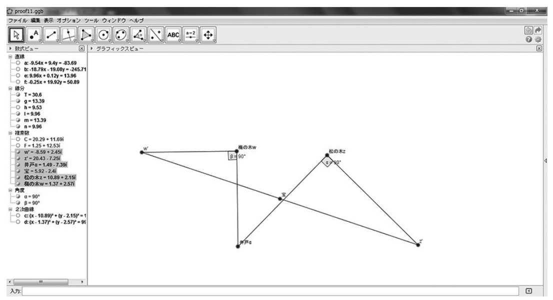


図1　GeoGebra での作図例

私がこの問題に出会ったのは，科学技術振興機構 (JST) が主催し東京理科大で行われた，2014 サイエンス・リーダーズ・キャンプである。秋山仁先生をはじめとする東京理科大の数学科の先生方を講師に「体験を通じた最先端の理数系総合指導力の向上」というテーマで2014年8月に行われた。その中で東京理科大の清水克彦先生による「数学の図形フリーソフト GeoGebra を用いた体

験・発見」という演習があり，そこでガモフの宝探し問題が取り上げられていた。清水先生は啓林館の教科書「数学活用」の編集製作に関われている。「数学活用」では，GeoGebra を使って，動的に作図について深く考えられるように書かれている。

実際に GeoGebra で作図し，井戸 α をドラッグして任意に動かすと，杭の位置 z'，w' は様々に移動するがその中点 T は動かないことが確認できる。

私はこの問題にとても興味を持ち，しばらくこの問題をあることに応用できないか取り組んでいたが，その過程で次のような拡張・一般化に気づいた。

2　ガモフの宝探し問題の拡張

ガモフの宝探し問題は，宝の位置が不動点になることで実現される。不動点になるためには 2 点の中点になる点に井戸の位置 が現れないことが条件になる。このことから，次のような拡張が考えられる。

2.1　一般角 θ だけ回転する場合

井戸 α から進み，松の木 z で θ だけ回転して同じ長さだけ進むとき，杭の位置 z_1 は

$$\begin{aligned} z_1&=(\alpha-z)(\cos\theta+i\sin\theta)+z \\ &=\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)-z(\cos\theta+i\sin\theta)+z \end{aligned}$$

梅の木 w で（z_1+w_1 に α が現れないことを考慮して）回転して同じ長さだけ進むとき，杭の位置 w_1 は

$$\begin{aligned} w_1&=(\alpha-w)\{-(\cos\theta+i\sin\theta)\}+w \\ &=-\alpha(\cos\theta+i\sin\theta)+w(\cos\theta+i\sin\theta)+w \end{aligned}$$

よってこれらの中点 M_1 は

$$\begin{aligned} M_1&=\frac{z_1+w_1}{2} \\ &=\frac{-z(\cos\theta+i\sin\theta)+z+w(\cos\theta+i\sin\theta)+w}{2} \end{aligned}$$

となって α に依存しない値になる。

$-(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi)$ であるから，梅の木 w で $\theta+\pi$ だけ回転することで，M_1 は不動点になる。

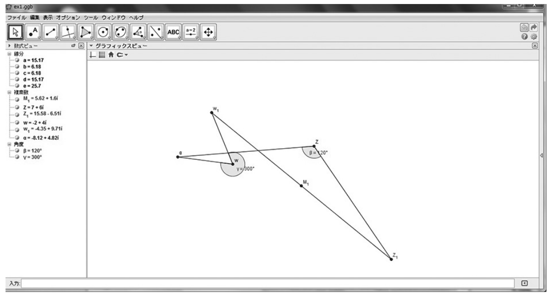


図 2　GeoGebra での作図例

2.2　一般角 θ だけ回転して拡大（縮小）する場合

2.1 の結果より，松の木，梅の木で回転して同距離だけ進まなくても不動点ができることに気づく。

井戸 α から進み，松の木 z で θ だけ回転してこれまでの進んできた距離の r 倍だけ進むとき，杭の位置 z_2 は

$$\begin{aligned} z_2&=(\alpha-z)r(\cos\theta+i\sin\theta)+z \\ &=\alpha r(\cos\theta+i\sin\theta)-zr(\cos\theta+i\sin\theta)+z \end{aligned}$$

梅の木 w で $\theta+\pi$ だけ回転してこれまでの進んできた距離の r 倍だけ進むとき，杭の位置 w_2 は

$$\begin{aligned} w_2&=(\alpha-w)\{r(\cos(\theta+\pi)+i\sin(\theta+\pi))\}+w \\ &=-\alpha r(\cos\theta+i\sin\theta)+wr(\cos\theta+i\sin\theta)+w \end{aligned}$$

よってこれらの中点 M_2 は

$$\begin{aligned} M_2&=\frac{z_2+w_2}{2} \\ &=\frac{-zr(\cos\theta+i\sin\theta)+z+wr(\cos\theta+i\sin\theta)+w}{2} \end{aligned}$$

となって α に依存しない値になる。よって M_2 は不動点になる。

これは，複素数 $\rho=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を用いて次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} z_2&=(\alpha-z)\rho+z=\alpha\rho-z\rho+z, \\ w_2&=(\alpha-w)(-\rho)+w=-\alpha\rho+w\rho+w \end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned} M_2&=\frac{z_2+w_2}{2} \\ &=\frac{\alpha\rho-z\rho+z-\alpha\rho+w\rho+w}{2} \\ &=\frac{-z\rho+z+w\rho+w}{2} \\ &=\left(w-\frac{z+w}{2}\right)\rho+\frac{z+w}{2} \end{aligned}$$

よって，M_2 は w を z と w の中点のまわりに $\arg(\rho)$ だけ回転し，$|\rho|$ だけ拡大（縮小）した点になる。

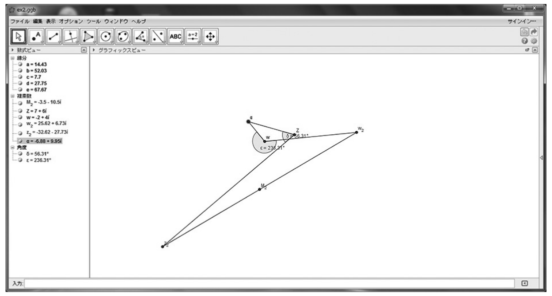


図 3　GeoGebra での作図例

2.3　樫の木 v の追加

さらに拡張を考えると松の木 z，梅の木 w に樫の木 v を追加して考えることができる。

$$\begin{aligned} z_3&=(\alpha-z)\rho_1+z=\alpha\rho_1-z\rho_1+z, \\ w_3&=(\alpha-w)\rho_2+w=\alpha\rho_2-w\rho_2+w \end{aligned}$$

とし，

$$\begin{aligned} v_3&=(\alpha-v)(-\rho_1-\rho_2)+v \\ &=\alpha(-\rho_1-\rho_2)+v\rho_1+v\rho_2+v \end{aligned}$$

とすると，$\triangle z_3w_3v_3$ の重心 M_3 は，

$$\begin{aligned} M_3&=\frac{z_3+w_3+v_3}{3} \\ &=\frac{-z\rho_1+z-w\rho_2+w+v\rho_1+v\rho_2+v}{3} \end{aligned}$$

となって α に依存しない値になる。よって M_3 は不動点になる。

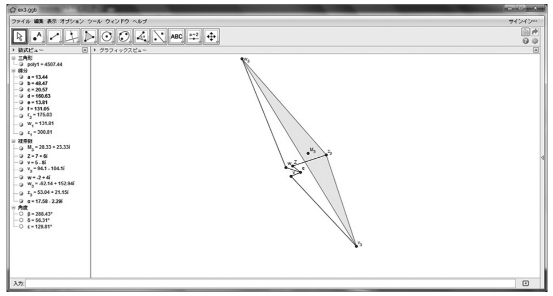


図 4　GeoGebra での作図例

3　一般化

2.3 より，一般に次のことが成り立つ。

複素数平面上の点 z_1，z_2，……，z_{n-1}，z_n と複素数 ρ_1，ρ_2，……，ρ_{n-1} について，任意の点 α を用いて

$$\begin{aligned} z'_1&=(\alpha-z_1)\rho_1+z_1, \\ z'_2&=(\alpha-z_2)\rho_2+z_2, \\ &\ \vdots \\ z'_{n-1}&=(\alpha-z_{n-1})\rho_{n-1}+z_{n-1} \end{aligned}$$

とし，

$$\begin{aligned} \rho_n&=-\rho_1-\rho_2-\cdots\cdots-\rho_{n-1}, \\ z'_n&=(\alpha-z_n)\rho_n+z_n \end{aligned}$$

とおくと，

$$\begin{aligned} M&=z'_1+z'_2+\cdots\cdots+z'_{n-1}+z'_n \\ &=(\alpha-z_1)\rho_1+z_1 \\ &\quad+(\alpha-z_2)\rho_2+z_2 \\ &\quad+\cdots\cdots \\ &\quad+(\alpha-z_{n-1})\rho_{n-1}+z_{n-1} \\ &\quad+(\alpha-z_n)(-\rho_1-\rho_2-\cdots\cdots-\rho_{n-1})+z_n \\ &=\alpha\rho_1-z_1\rho_1+z_1 \\ &\quad+\alpha\rho_2-z_2\rho_2+z_2 \\ &\quad+\cdots\cdots \\ &\quad+\alpha\rho_{n-1}-z_{n-1}\rho_{n-1}+z_{n-1} \\ &\quad+\alpha(-\rho_1-\rho_2-\cdots\cdots-\rho_{n-1}) \\ &\quad-z_n(-\rho_1-\rho_2-\cdots\cdots-\rho_{n-1})+z_n \\ &=-z_1\rho_1+z_1 \\ &\quad-z_2\rho_2+z_2 \\ &\quad-\cdots\cdots \\ &\quad-z_{n-1}\rho_{n-1}+z_{n-1} \\ &\quad-z_n(-\rho_1-\rho_2-\cdots\cdots-\rho_{n-1})+z_n \end{aligned}$$

となって，M は α に依存しない値になる。よって，M は不動点になる。

4　今後の展望

ガモフの宝探し問題の拡張・一般化について述べたが，今回の内容は複素数平面を理解していればできるので，数学Ⅲまでの内容である。今後はこれを何かに使えないか，また，さらに変形や拡張・一般化が考えられないかを生徒といっしょに考えたいと思っている。

いずれも GeoGebra で作図可能であり，井戸の位置 α を任意に動かしても動かない点があることが簡単に確かめられる。実際に見て確認できることは生徒にとってわかりやすいし，いろいろと条件を変えて多くの実験ができるということも強みであり，高校生にとっても興味の湧く題材であると思う。清水先生も「いろいろとコンピュータで試してみることで，その先に何かあると感じとることができる」ということを話されていて，学生の指導や研究に活用されているということであった。そのような取り組みを今後していきたいと考えている。

野呂 耕一郎　のろ こういちろう

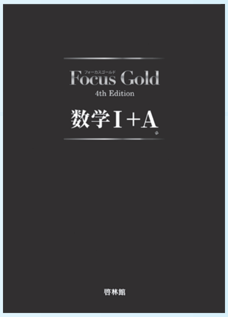
秋田県生まれ。
山形大学大学院理工学研究科後期博士課程中退。大学院では公開鍵暗号の研究に取り組んだ。

真の数学力が身につく

Focus Gold 4th Edition

フォーカス・ゴールド

1. 『先に進める学習』と『基本も押さえる』に応えた「マスター編」
   フォローアップ（進める学習）とフィードバック（振り返り学習）で入試に必要な学力が確実に身につきます。
2. 充実したコラム
   数学への興味や知識の深まりなどが感じられる内容になっています。



A5判
3色刷

数学I+A，数学II+B

入試に必要な「数学の本質」が確実に身につく

システム数学　入試必修問題集シリーズ

●河合塾の徹底した入試分析で良質の問題を厳選
●難関国公私立大学の入試に対応した『実戦』と国公私立大学の入試に対応した『練磨』の２シリーズ発刊
●入試に必要な重要問題で構成したテーマ別問題と，最近の傾向で学習できる総合演習問題の２部構成

実　戦	数学I･II･A･B 2nd Edition	A5判	176頁／定価本体600円＋税 【解答（別冊）】A5判／276頁／定価本体476円＋税
実　戦	数学III 2nd Edition	A5判	108頁／定価本体467円＋税 【解答（別冊）】A5判／180頁／定価本体495円＋税
練　磨	数学I･II･A･B 2nd Edition	A5判	136頁／定価本体571円＋税 【解答（別冊）】A5判／168頁／定価本体286円＋税
練　磨	数学III 2nd Edition	A5判	88頁／定価本体381円＋税 【解答（別冊）】A5判／100頁／定価本体238円＋税

―― 知が啓く。――
啓林館
http://www.shinko-keirin.co.jp/

〒543-0052　大阪市天王寺区大道4-3-25　TEL.06-6779-1531　FAX.06-6779-5011
〒113-0023　東京都文京区向丘2-3-10　TEL.03-3814-2151　FAX.03-3814-2159
〒003-0005　札幌市白石区東札幌5条2-6-1　TEL.011-842-8595　FAX.011-842-8594
〒461-0004　名古屋市東区葵1-4-34 双栄ビル2F　TEL.052-935-2585　FAX.052-936-4541
〒732-0052　広島市東区光町1-7-11 広島CDビル5F　TEL.082-261-7246　FAX.082-261-5400
〒810-0022　福岡市中央区薬院1-5-6 ハイヒルズビル5F　TEL.092-725-6677　FAX.092-725-6680

20161101